ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE
MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 12 August 1932 Heft 4

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Über Stoß- und Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten.

Von *Herbert Wagner* in Berlin.

(Aus dem flugwissenschaftlichen Institut der Technischen Hochschule zu Berlin.)

Diese Überlegungen wurden im Hinblick auf Start und Landung von Seeflugzeugen angestellt[1]). Es wird reibungsfreie unzusammendrückbare Flüssigkeit vorausgesetzt. Die Erdbeschleunigung wird vernachlässigt; die folgenden Überlegungen gelten daher um so genauer, je kleiner der Körper ist und je schneller er sich bewegt. Bei lange währenden, vor allem bei stationären Vorgängen gelten diese Überlegungen nur in naher Umgebung des Körpers.

Zuerst werden die Grenzbedingungen an der freien Oberfläche hinsichtlich auftretender Unstetigkeiten untersucht. Je nach Art dieser Unstetigkeiten lassen sich zwei Arten von Flüssigkeitsbewegung unterscheiden, die man vielleicht als Stoß- und Gleitvorgänge[2]) ansprechen kann.

Bei Stoßvorgängen (Abb. 1, 2, 23 oben) besteht die freie Oberfläche während des betrachteten Zeitabschnittes aus den gleichen Flüssigkeitsteilchen[3]). Ist eine Kontur zwischen

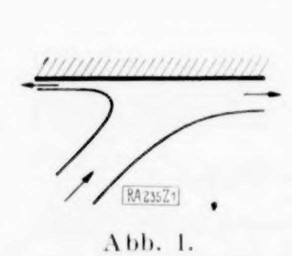


Abb. 1.

Zentrum
RA235Z2
V_0

Abb. 2.

[1]) Vgl. Vortrag des Verf. am Int. Kongr. f. Mech., Stockholm 1930, und Vortr. d. Verf. vor der Wiss. Ges. f. Luftfahrt 1930, Z. f. Flugtechnik u. Mot. (ZFM) 1931, Heft 1. Mit der Abschätzung der Stoßkraft beim Landen von Seeflugzeugen beschäftigen sich die beiden mir nachträglich bekannt gewordenen Arbeiten: v. Kármán, „The Impact on Seaplane Floats during Landing" (Sonderdruck Washington, 1. Oktober 1929) und W. Papst, „Theorie des Landestoßes von Seeflugzeugen" (ZFM 1930, Heft 9).

[2]) Gleitvorgänge sind das gleiche wie Ausflußvorgänge, doch schien letzte Bezeichnung in diesem Zusammenhang unzweckmäßig.

[3]) Will man den Grenzfall vollkommen gleichzeitigen Aufschlages einer Körperfläche nicht als Grenzfall eines sehr schnellen Aufschlages (etwa nach § 14) betrachten, so scheidet der entsprechende Teil der Flüssigkeitsoberfläche aus der freien Oberfläche aus und es entsteht kein Spritzer. Man muß dann die Kompressibilität berücksichtigen; statt der Spritzerenergie entsteht Schallenergie. Aber auch in diesem Grenzfall treten im Gegensatz zum Gleitvorgang keine neuen Flüssigkeitsteilchen an die Oberfläche.

freier Oberfläche und Körper vorhanden, so wird diese in ihrer ganzen Länge von Spitzen (Kanten von Flüssigkeitskeilen, Abb. 7) gebildet. Diese Spitzen arten oft zu Spritzern aus, die als Ausdruck der beim Stoß „vernichteten" Bewegungsenergie aufgefaßt werden können. Stoßvorgänge sind durch die ursprüngliche Bewegung der Flüssigkeit und den Verlauf der Bewegung des Körpers eindeutig bestimmt.

Bei Gleitvorgängen (Abb. 12, 26) gibt es längs der Kontur zwischen Körper- und Flüssigkeitsoberfläche Bereiche (z. B. Gleitkanten), längs welcher neue Flüssigkeitsteilchen an die Oberfläche treten. Zur Bestimmung von Gleitvorgängen sind außer der Angabe der ursprünglichen Bewegung der Flüssigkeit und des Verlaufs der Bewegung des Körpers Annahmen über die Lage der Ablösungsstelle der Strömung von der Körperoberfläche erforderlich. Ist im Bereich der Strömung eine vorspringende Kante vorhanden und soll unendlich großer Unterdruck an dieser Stelle vermieden werden, so muß die Ablösung längs dieser Kante stattfinden[4]).

Der Gleitvorgang läßt sich vergleichen mit der Flüssigkeitsbewegung um einen Körper, von dem sich eine Wirbelfläche loslöst: die Bestimmung der Tangentialgeschwindigkeit der neu an die Oberfläche tretenden Flüssigkeitsteilchen entspricht der Bestimmung der Wirbelstärke der neu entstehenden Wirbelfäden.

Eingehend untersucht wird die Bewegung von Körpern mit sehr (unendlich) flachem Boden an der Flüssigkeitsoberfläche (Abb. 12). Die bisherige Behandlung des Problems mit Hilfe von Druckpunkten[5]) berücksichtigte die Erdbeschleunigung und gab eine Klärung des Wellenbildes. Sie war aber wegen Nichtbeachtung der am Vorderrand auftretenden Unstetigkeit (Spritzer) nur in Sonderfällen in der Lage, die Strömungsvorgänge in Körpernähe zu beschreiben und den Widerstand richtig zu berechnen. Vorliegende Arbeit zeigt, daß im betrachteten Grenzfall stationäre oder nicht stationäre Gleit- oder Stoßbewegungen eines flachen Bodens an der freien Oberfläche durch die „gleiche Tragflügelbewegung" bestimmt sind: Mit Ausnahme des Spritzerbereiches herrscht an der Druckfläche des Bodens der gleiche Druck wie an der Unterseite des gleichen Tragflügels; statt der beim Tragflügel auftretenden Saugkraft löst sich am Rande der Druckfläche ein Spritzer ab, dessen Energie der Widerstandsvermehrung infolge des Wegfalls der Saugkraft entspricht. Während beim Tragflügel der Widerstand nur vom Auftrieb abhängt (induzierter Widerstand), ist beim Boden der zusätzliche Widerstand infolge Wegfalls der Saugkraft auch bei gleichem Auftrieb für verschiedene Formgebung des Bodens verschieden. Einige Beispiele zeigen, wie sich die Randbedingung für die Kontur der Druckfläche (Erhebung der Flüssigkeitsteilchen gleich Höhe des Bodens, vgl. § 10) erfüllen läßt.

Ferner werden Beziehungen für zweidimensionale Flüssigkeitsbewegung mit freier Oberfläche abgeleitet, wenn ein Ähnlichkeitszentrum vorhanden ist. Beispiele solcher Bewegung sind: das ebene Problem des Eindringens eines Keiles mit konstanter Geschwindigkeit V_0 in eine Flüssigkeit, die ursprünglich ebene oder keilförmige Oberfläche besaß (Abb. 2, 26, 29) und das achsensymmetrische Problem des Eindringens eines Kegels mit konstanter Geschwindigkeit in eine Flüssigkeit mit ursprünglich ebener oder kegelförmiger Oberfläche.

Schließlich wird der m. W. noch nicht behandelte Fall des stationären Gleitens einer ebenen Platte durchgerechnet (ebenes Problem, endlich großer Anstellwinkel).

Bezeichnungen: Skalare mit lateinischen oder griechischen Buchstaben, Vektoren mit deutschen Buchstaben

t	Zeit
φ	Geschwindigkeitspotential
$\mathfrak{v} = \operatorname{grad} \varphi$, v	Geschwindigkeit der Flüssigkeit
$\frac{D}{Dt}$	Stockesscher Operator (für die substantielle Änderung)
$\mathfrak{e}_n$	Einheitsvektor senkrecht zur Oberfläche
$\mathfrak{v}_n$, $v_n = \mathfrak{e}_n \mathfrak{v}$	Normal- } Komponente der Geschwindigkeit
$\mathfrak{v}_t$, v_t	Tangential- } der Flüssigkeit an der Oberfläche
$\mathfrak{V}$, V	Translationsgeschwindigkeit eines starren Körpers
V_n	Normalgeschwindigkeit der Kontur eines (im allgemeinen seine Form verändernden) Körpers
ϱ	spec. Dichte der Flüssigkeit.

[4]) Auch der in Abb. 23 Mitte gezeigte Vorgang ist wegen der Ablösungsstelle C („Gleitkante") ein Gleitvorgang. Seine allfällige Behandlung als Stoßvorgang ist eine Näherungsbetrachtung, die nur im Grenzfall unendlich dünner Spritzerdicke zu genauen Ergebnissen führt.

[5]) Lamb, Hydrodynamik, deutsch von Helly, 1931. S. 446 ff. (insbesondere Abb. S. 454) und S. 487 ff.

Ferner für das ebene Problem der Flüssigkeitsbewegung

α	Neigungswinkel der Oberfläche (meist bezogen auf die ursprünglich ebene Oberfläche)
s	Bogenlänge der Oberfläche
$\mathfrak{e}_t$	Einheitsvektor in Richtung der Tangente an die Oberfläche
ψ	Stromfunktion
$z = x + i y$	komplexe Koordinate
$w = \varphi + i \psi$	komplexe Strömungsfunktion
$\frac{d w}{d z} = v_x - i v_y$	komplexe Geschwindigkeit.

I. Grundlagen.

1. Grenzbedingung. Als geometrische Grenzbedingung bezeichnen wir im folgenden die Beziehung, daß an der Oberfläche der Flüssigkeit (am Körper und an der freien Oberfläche) die Normalgeschwindigkeit v_n der Flüssigkeit gleich ist der Fortbewegungsgeschwindigkeit der Oberfläche senkrecht zu sich selbst[6]). An der freien Oberfläche werden wir sie beim ebenen Problem oft durch ihre „Differentialform" (vgl. Abb. 3)

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \mathfrak{e}_n \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial s} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

ersetzen[7]), müssen dann aber an einer Stelle die ursprüngliche Bedingung selbst befriedigen.

Hierzu kommt an der freien Oberfläche die dynamische Grenzbedingung. Da die freie Oberfläche eine Fläche konstanten Druckes ist, steht der Druckgradient und folglich die Beschleunigung $\frac{D\mathfrak{v}}{Dt}$ senkrecht auf die freie Oberfläche. Also fürs ebene Problem

$$\mathfrak{e}_t \frac{D\mathfrak{v}}{Dt} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Oder mit

$$\frac{D\mathfrak{e}_t}{Dt} = \mathfrak{e}_n \frac{D\alpha}{Dt}$$

$$\frac{D v_t}{Dt} = \frac{D \mathfrak{e}_t \mathfrak{v}}{Dt} = \mathfrak{v} \frac{D \mathfrak{e}_t}{Dt} = v_n \frac{D\alpha}{Dt} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3).$$

Wir fassen die dynamische Grenzbedingung Gl. (3) mit der geometrischen Gl. (1) zusammen

$$\frac{D v_t}{Dt} = v_n \mathfrak{e}_n \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial s} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4).$$

Auch beim räumlichen Problem ist $\frac{D\mathfrak{e}_n}{Dt}$ wegen der geometrischen Grenzbedingung bestimmt durch die Angabe von $\mathfrak{v}$ an der freien Oberfläche:

$$\frac{D\mathfrak{e}_n}{Dt} = [\mathfrak{e}_n [\mathfrak{e}_n \,\mathrm{grad}]] \cdot \mathfrak{e}_n \mathfrak{v} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5).$$

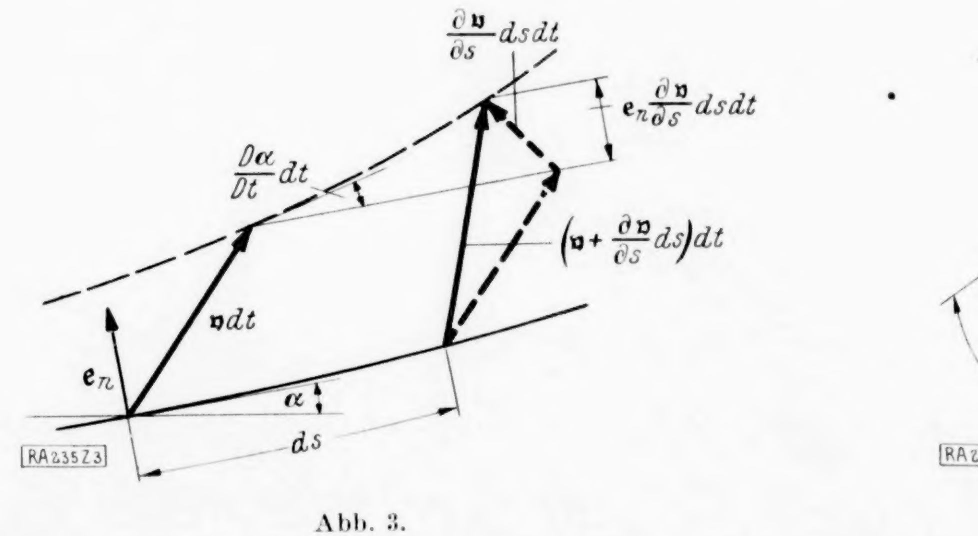


Abb. 3.

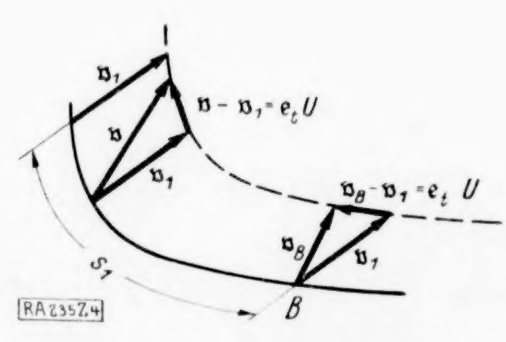


Abb. 4.

[6]) Lamb, l. c. S. 8.

[7]) Wir verwenden $\frac{\partial}{\partial s}$, weil wir hier und bei allen späteren Angaben über den Geschwindigkeitsverlauf an der Oberfläche lediglich die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen der Oberfläche selbst in Betracht ziehen wollen.

Der dynamischen Grenzbedingung $\left[\mathfrak{e}_n \frac{D\mathfrak{v}}{Dt}\right] = 0$ wollen wir die Form geben:

$$\frac{D\mathfrak{v}_t}{Dt} = \frac{D}{Dt}\left[\mathfrak{e}_n [\mathfrak{e}_n \mathfrak{v}]\right] = \mathfrak{e}_n \cdot \mathfrak{v}\frac{D\mathfrak{e}_n}{Dt} + \mathfrak{e}_n \mathfrak{v} \cdot \frac{D\mathfrak{e}_n}{Dt} \quad \text{. . . . . (6).}$$

Wegen Gl. (4) bzw. Gl. (5) und Gl. (6) gilt

Satz 1: Ist zu einem Zeitpunkt für alle Flüssigkeitsteilchen der freien Oberfläche die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ einschließlich ihrer Richtungsableitung (in Richtung der Oberfläche) bekannt, so ist für diese Teilchen auch die zeitliche Änderung der Tangentialgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_t$ bekannt.

2. Grenzbedingung bei unstetiger Krümmung. Vorbetrachtung: Für ein ebenes Problem der Flüssigkeitsbewegung gelte folgende Voraussetzung (Abb. 4): Auf einem Stück s_1 der freien Oberfläche verschiebe sich die Form der Oberfläche parallel zu sich selbst mit der zeitlich unveränderlichen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$. Alle jeweils am Beginn B von s_1 befindlichen Flüssigkeitsteilchen sollen an dieser Stelle die gleiche Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_B$ haben.

Wegen der geometrischen Grenzbedingung gilt längs s_1 für die „relative" Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen $\mathfrak{e}_t U = \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1$, wobei U der Betrag der relativen Geschwindigkeit ist. Daraus $\mathfrak{v}$ in die dynamische Grenzbedingung Gl. 2 eingesetzt, gibt $\frac{DU}{Dt} = 0$, d. h. für jedes Flüssigkeitsteilchen ist bei seiner Bewegung längs s_1 der Betrag U konstant. Da im Punkte B für alle Flüssigkeitsteilchen $U = |\mathfrak{v}_B - \mathfrak{v}_1|$ gleich groß ist, folgt aus obiger Voraussetzung: U ist längs s_1 konstant.

Grenzübergang. Wir wenden diese Betrachtung auf einen sehr (unendlich) kleinen Bereich $s_1 \rightarrow 0$ an, längs dessen sich die Neigung der freien Oberfläche im allgemeinen um einen endlichen Winkel ändere (Abb. 5). An der B benachbarten Oberfläche außerhalb s_1 sei die Krümmung der Oberfläche und das Geschwindigkeitsfeld stetig und zeitlich stetig veränderlich. Für die Verschiebung dieses Bereiches s_1 mit einer stetig veränderlichen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$ ergibt obige Betrachtung: ändert sich die Form der Oberfläche s_1 auf einem (endlichen) Wege W stetig[8]), so ist längs s_1 in jedem Augenblick U von einer Konstanten nur um ΔU verschieden, wobei $\frac{\Delta U}{U}$ klein ist wie $\frac{s_1}{W}$. Oder kurz gesagt:

Satz 2: Für jeden kleinen Bereich $s_1 \rightarrow 0$ der freien Oberfläche mit stetiger oder unstetiger Krümmung, dessen Form sich „nahezu unverändert" mit einer Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$ verschiebt, gilt mit $U =$ konst.: $\mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1 \rightarrow \mathfrak{e}_t U$; d. h. die Grenzbedingung an der freien Oberfläche ist für das relative Geschwindigkeitsfeld $\mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1$ die gleiche wie bei einer stationären Strömung.

Mit entsprechenden Stetigkeitsbedingungen läßt sich diese Betrachtung auch räumlich anstellen. Es ergibt sich mit den für das ebene Problem festgelegten Bezeichnungen $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{e}_t U + \mathfrak{K}$, wobei $\mathfrak{K}$ eine längs s_1 konstante Geschwindigkeit in Richtung der Kante darstellt.

3. Strömung im Bereich unstetiger Krümmung. Ecken. Durch den unendlich kleinen Kreis r_1 umschließen wir die Unstetigkeit s_1 (Abb. 6) und das Flüssigkeitsgebiet G_1. Das Flüssigkeitsgebiet G_2 liegt zwischen dem Kreis r_1 und dem (z. B. konzentrischen) größeren (aber immer noch unendlich kleinen) Kreis r_2. Wegen Satz 2 ist $\mathfrak{v}_B$ längs BB_1 und $\mathfrak{v}_C$ längs CC_1 konstant. Wegen des Satzes[9]) der Funktionentheorie „Besitzt eine in einem Gebiet (G_2) analytische Funktion an einem glatten Kurvenbogen die Randwerte Null, so ist sie identisch

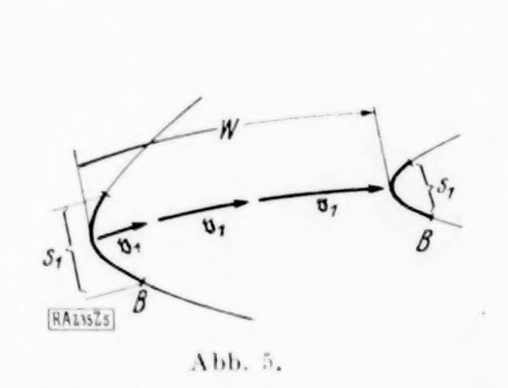


Abb. 5.

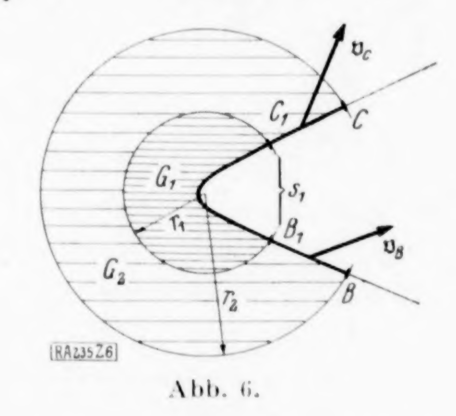


Abb. 6.

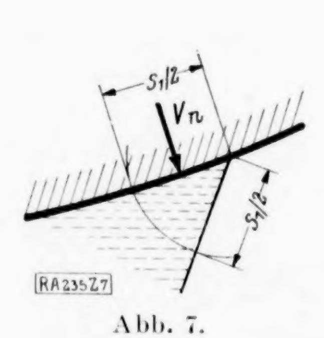


Abb. 7.

[8]) d. h. die im Maßstab $\frac{1}{s_1}$ vergrößerte Oberfläche soll ihren Charakter einer (mindestens stückweise) glatten Kurve beibehalten. Ferner soll es möglich sein, auf s_1 eine unendliche Folge von Punkten (Abstand Δ) so auszuwählen, daß auf dem Wege W jedes Δ eine zeitlich stetig veränderliche Drehung um einen (im allgemeinen) endlichen Winkel erfährt.

[9]) Hurwitz-Courant, Funktionentheorie, Springer 1929, S. 375.

Null" muß im Gebiet G_2 gelten: $\mathfrak{v} - \mathfrak{v}_B = 0$. Daraus folgt $\mathfrak{v}_C = \mathfrak{v}_B$, was wegen Satz 2 nur mit $U = 0$, also mit $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1$ verträglich ist. Längs der ganzen Kontur von G_1 ist folglich $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1$, also[10]) auch in G_1 selbst.

Satz 3: In einer einspringenden oder vorspringenden Unstetigkeit der freien Oberfläche, die mindestens um r_2 von anderen Unstetigkeiten oder der Körperoberfläche entfernt ist, ist die Geschwindigkeit der Flüssigkeit gleich der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$ der Unstetigkeit.

Spitze des Spritzers. Mit Hilfe des gleichen Satzes der Funktionentheorie läßt sich für den Fall Abb. 7, daß längs $\frac{s_1}{2}$ die Kontur des Körpers und der freien Oberfläche stetig gekrümmt ist und daß die Normalgeschwindigkeit V_n am Körper stetig und zeitlich stetig veränderlich ist, beweisen

Satz 4: Bildet die freie Oberfläche mit der Körperoberfläche eine Spitze, so ist die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in der Spitze gleich der Geschwindigkeit der Spitze.

Wurzel des Spritzers. Wir betrachten den Fall einer Unstetigkeit in Körpernähe. Mit Hilfe der Methode von Schwarz-Christoffel[11]) finden wir für die Strömung Abb. 8

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\tau + 1}{\tau} \quad \text{und} \quad d \ln \frac{dz}{dw} = -i \frac{d\tau}{(\tau+1)\sqrt{\tau}} .$$

τ ist die komplexe Hilfsebene. Ist $-U$ die Geschwindigkeit an der freien Oberfläche und δ die Spritzerdicke, so erhalten wir daraus

$$w = -U \frac{\delta}{\pi} (1 + \ln \tau + \tau) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

$$z = \frac{\delta}{\pi} \left(\ln \frac{1}{\tau} + 4\, i \sqrt{\tau} + \tau + 5 \right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8).$$

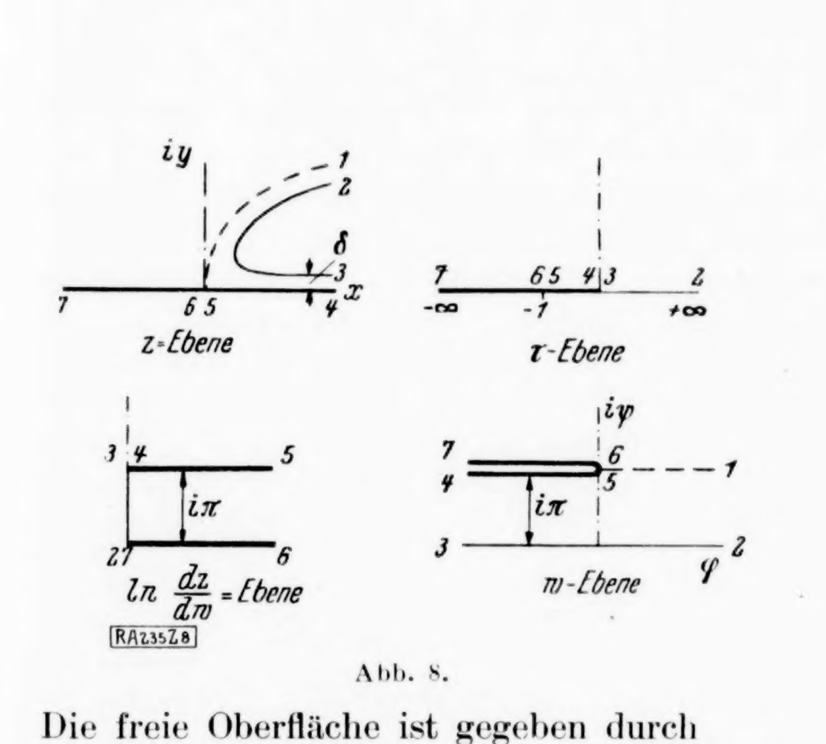


Abb. 8.

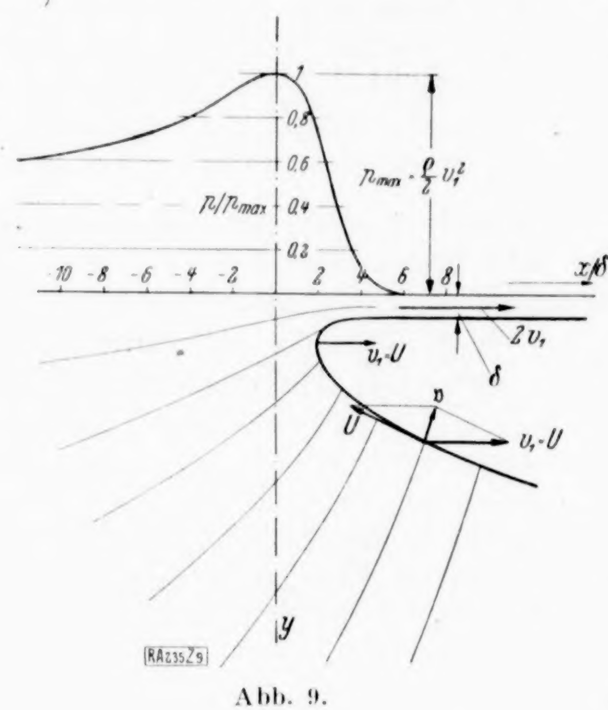


Abb. 9.

Die freie Oberfläche ist gegeben durch

$$\pi \frac{x}{\delta} = 5 + \frac{\pi^2}{16} \left(\frac{y}{\delta} - 1 \right)^2 - \ln \left[\frac{\pi^2}{16} \left(\frac{y}{\delta} - 1 \right)^2 \right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9).$$

Am Boden (negativ reelle τ) herrscht der Flüssigkeitsdruck (vgl. Abb. 9):

$$p = 2\, \varrho\, U^2 \frac{\sqrt{-\tau}}{(1 + \sqrt{-\tau})^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10).$$

Der maximale Druck $p_{\max} = \frac{1}{2} \varrho U^2$ tritt an der Stelle $\tau = -1$, also $x = 0$ auf. Die Druckkraft P_w auf das Stück des Bodens zwischen x und $x = +\infty$ ist $P_w = \frac{4}{\pi} \varrho\, \delta\, U^2 \sqrt{-\tau}$. Für $\tau \to -\infty$ ist nach Gl. (8) $\frac{z}{\tau} \to \frac{\delta}{\pi}$; also

$$\text{für} \quad x \to -\infty \quad \text{wird} \quad P_w \to 4\, \varrho\, U^2 \sqrt{\frac{\delta}{\pi}} \sqrt{-x} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11).$$

[10]) vgl. Lamb, l. c. S. 46.
[11]) Lamb, l. c. S. 100.

Überlagert man der Strömung Abb. 8 eine konstante Geschwindigkeit v_1, so entsteht eine im engen Sinn des Wortes nichtstationäre Strömung, ohne daß sich die Druckverteilung ändert. Überlagert man insbesondere eine Geschwindigkeit $v_1 = U$ in Richtung des Bodens (Abb. 9), also wegen Gl. 7

$$w_1 = v_1 \left[\frac{-\delta}{\pi} (1 + \ln \tau + \tau) + z \right] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12),$$

so herrscht an der freien Oberfläche hinreichend weit außerhalb des Spritzers die Tangentialgeschwindigkeit Null. Für so große z bzw. τ, daß man $\ln \tau$ gegenüber $\sqrt{\tau}$ vernachlässigen kann, geht Gl. 12 bei Beachtung von Gl. 8 über in

$$w_1 \to 4 v_1 \sqrt{\frac{\delta}{\pi}} \cdot \sqrt{-z} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12).$$

Eine der hier beschriebenen ähnlichen Strömung tritt in einem kleinen Bereich wohl bei jedem Stoß- und Gleitvorgang auf.

Gleitkante. Wir wenden Satz 2 auf die freie Oberfläche hinter einer Gleitkante an. Stetige Krümmung der Körperoberfläche an dieser Stelle vorausgesetzt, wird (vgl. Abb. 10) die relative Strömung in einem Bereich (unendlich) kleiner z gegeben durch

$$d \ln \frac{dz}{dw} = \frac{i\,dw}{\pm\sqrt{w}} \quad \ldots \quad (14), \qquad \text{also} \quad \frac{z}{A} = 2 \int_0^w e^{\pm i \sqrt{\frac{w}{AU}}}\, d\frac{w}{AU} \quad \ldots \ldots \quad (15).$$

A ist eine den Maßstab bestimmende Konstante, U ist die relative Tangentialgeschwindigkeit.

4. Eindeutigkeit. Bei einem Stoßvorgang sei zur Zeit $t = 0$ die Form von freier Oberfläche und Körperoberfläche und das Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit gegeben. Für $t \geqq 0$ sei der Verlauf der bewegten Grenze der Körperoberfläche (V_n) gegeben. Treten im Verlauf der Zeit keine neuen Flüssigkeitsteilchen an die freie Oberfläche (Stoßvorgang), so ist durch diese Angaben der zeitliche Verlauf der Strömung eindeutig bestimmt, denn:

Durch Angabe des Geschwindigkeitsfeldes (also auch von v_n) zur Zeit t ist die Form der Oberfläche zur Zeit $t + dt$ eindeutig bestimmt. An der Körperoberfläche ist voraussetzungsgemäß V_n auch zur Zeit $t + dt$ gegeben. An der freien Oberfläche ist $\mathfrak{v}_t$ zur Zeit $t + dt$ (nach Satz 1) und daraus bei einfach zusammenhängender Oberfläche auch φ (abgesehen von einer bedeutungslosen Konstanten) eindeutig bestimmbar. Durch diese Angaben V_n bzw. φ ist das Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit zur Zeit $t + dt$ eindeutig bestimmt[12]) und somit auch v_n an der freien Oberfläche eindeutig berechenbar. Usw. für alle späteren dt. Dabei dürfen nur die oben geklärten Unstetigkeiten (außer Gleitkanten) auftreten. Auf dem Wege dieses Beweises ließen sich (wenn auch sehr umständlich) allgemeine Fälle nichtstationärer Stoßvorgänge tatsächlich berechnen.

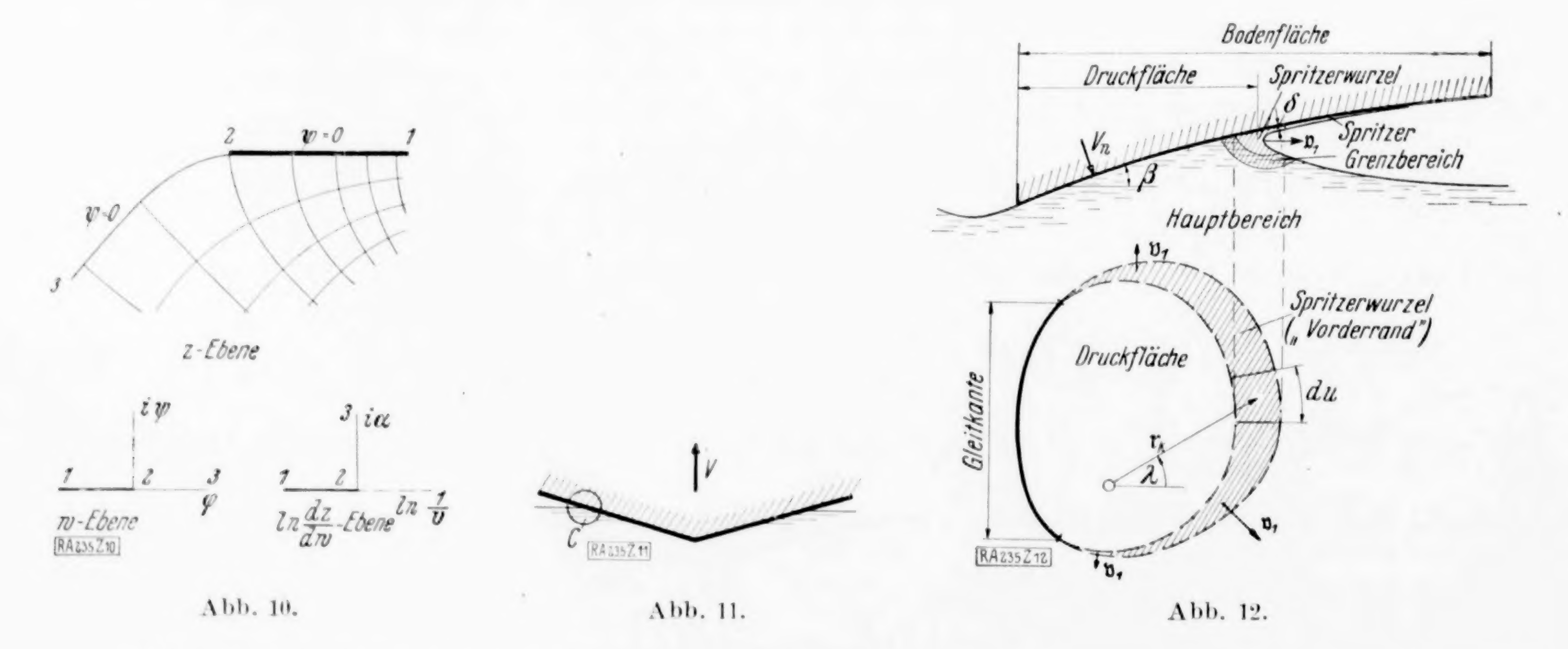


Abb. 10. Abb. 11. Abb. 12.

Bei Gleitvorgängen ist es nach Abb. 10 für die Strömung in Umgebung der Ablösungsstelle gleichgültig, ob die Ablösungsstelle eine Gleitkante ist oder ob sich hinter der

[12]) Lamb, l. c. S. 46.

Ablösungsstelle der Boden stetig gekrümmt fortsetzt. Ist für letzten Fall der zeitliche Verlauf der Lage der Ablösungsstelle gegeben[13]), so sind beide Probleme gleichwertig.

Es scheint mir zweifelsfrei, daß ein Gleitvorgang eindeutig bestimmt ist durch Angabe von Oberfläche und Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit zur Zeit $t = 0$ und durch Angabe des Verlaufs von Körperkontur und Lage der Ablösungsstelle für $t \geq 0$. Die für Stoßvorgänge gebrauchte Beweisführung stößt hier aber auf folgende Schwierigkeit. Während der Zeit dt hat sich ein neues Stückchen der freien Oberfläche gebildet, dessen Tangentialgeschwindigkeit nicht nach Satz 1 bestimmbar ist. Es scheint nun, daß diese Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_t$ für das unendlich kleine neue Stückchen der Oberfläche durch die Strömung Abb. 10 bestimmt ist: es müßten sich für die Zeit $t + dt$ die Größen A und U der Gl. 15 so bestimmen lassen, daß dieses Geschwindigkeitsfeld glatt übergeht in den angrenzenden Bereich. Ich habe aber diese Überlegung nicht näher durchgeführt.

Abhebevorgänge. Es ist mir nicht gelungen, Klarheit über die Vorgänge beim Abheben eines Körpers von der Oberfläche der Flüssigkeit zu erhalten (Abb. 11), wenn in einem Bereich C sich zurückziehender Körperoberfläche andere als die bisher besprochenen Arten von Unstetigkeiten auftreten. Von solchen Strömungsvorgängen ist weiterhin nicht mehr die Rede.

II. Unendlich flacher Boden.

5. Bezeichnungen und Bereiche. Die den halben Raum vollständig erfüllende Flüssigkeit besitze ursprünglich ebene Oberfläche. Sie sei ursprünglich in Ruhe. Durch die Bewegung des Bodens eines Körpers an der Oberfläche (Abb. 12) entstehe eine Flüssigkeitsbewegung (räumliches Problem). Wir betrachten den Grenzfall, daß die Neigung β der Druckfläche gegenüber der ursprünglichen Oberfläche der Flüssigkeit an jeder Stelle unendlich klein ist.

Die Druckfläche besitze im Grundriß nach jeder Richtung endliche Ausdehnung. Die Normalgeschwindigkeit V_n an der Druckfläche, deren Größenordnung wir willkürlich festsetzen können, sei klein wie β. Die seit Beginn des Vorganges verlaufene Zeit, während welcher die unendlich kleine Eintauchtiefe (klein wie β) erreicht wurde, ist folglich endlich.

Wir zerlegen den von Flüssigkeit erfüllten Raum in die Bereiche (Abb. 12)

Hauptbereich (Hauptströmung)
Spritzerwurzel (Wurzelströmung)[14])
Spritzer.

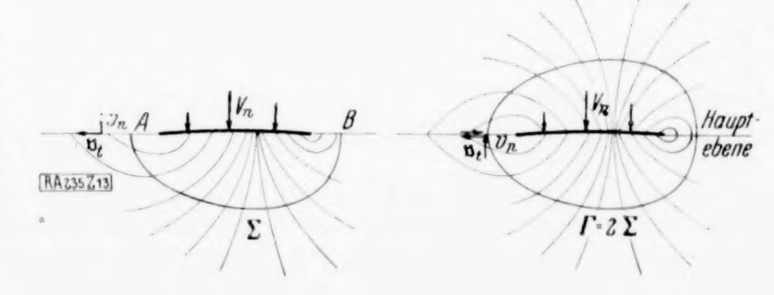
Hauptbereich und Spritzerwurzel haben gemeinsam den Grenzbereich.

Die zeitlich veränderliche Kontur der Druckfläche wird gebildet (Abb. 12)
am Vorderrand, d. h. an Stellen, an welchen sie sich (mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$) ausbreitet, durch die Spritzerwurzel
an Stellen, an welchen sie sich zurückzieht, durch die Gleitkante.

Als gleiche Tragflügelbewegung bezeichnen wir die nichtstationäre Bewegung einer unendlich dünnen Platte, die in jedem Augenblick gleiche Form, Kontur und Geschwindigkeiten V_n besitzt wie die Druckfläche, in allseitig ausgedehnter, im Unendlichen ruhender Flüssigkeit (vgl. Abb. 13 rechts).

6. Geometrische Beziehung. In beiden Fällen Abb. 13 werde im betrachteten Augenblick durch die gleiche Bewegung gleicher Platten die gleiche Geschwindigkeit V_n hervorgerufen:

Halbraum: Die Strömung ist eindeutig bestimmt durch die Angabe von V_n an der Druckfläche und von φ an der freien Oberfläche. Die Angabe φ kann ersetzt werden durch die Angabe eines zirkulationsfreien Geschwindigkeitsfeldes $\mathfrak{v}_f$ an der freien Oberfläche.



Gleiche Tragflügelströmung: Diese Strömung im einfach zusammenhängenden Raum ist eindeutig bestimmt durch die Angabe der Geschwindigkeit V_n an der Tragflügelfläche und die Angabe der Unstetigkeiten. Als solche seien in der Hauptebene Wirbelflächen von der Stärke $2[\mathfrak{c}_n \mathfrak{v}_f]$ vorhanden.

Abb. 13.

[13]) Die Wahl der Ablösungsstelle ist bei stetig gekrümmtem Boden der einschränkenden Bedingung unterworfen, daß sich die Strömung nach außen von der Bodenfläche ablöst. Dies ist entsprechend der Strömung Abb. 10 mit einem Druckanstieg in Richtung der Geschwindigkeit verbunden. Es liegt nahe, die Ablösungsstelle so zu wählen, daß dieser Druckanstieg vermieden wird. Dies kann durch die als Grenzfall mögliche Bedingung stetiger Krümmung an dieser Stelle gerade noch erreicht werden. Beim Gleiten von Flugbooten (schwach gekrümmter Boden, große Reynoldssche Zahl) löst sich die Flüssigkeit, wie man aus Versuchen schließen kann, unter Umständen erst weit hinter dem Druckminimum ab.

[14]) Für unsern Grenzfall $\beta \rightarrow 0$ wird sich ergeben, daß die Spritzerwurzel unendlich dünn ist.

Sind gleiche $\mathfrak{v}_t$ gegeben, so folgt die Identität beider Geschwindigkeitsfelder im unteren Halbraum für diesen Zeitpunkt aus der Identität und Eindeutigkeit beider Grenzbedingungen.

Im Sinne dieses Vergleiches sprechen wir auch bei der Strömung im Halbraum von „Wirbelstärke" $2[\mathfrak{e}_n \mathfrak{v}_t]$ und „Zirkulation" $\Gamma = 2\Sigma$[15]).

Es läßt sich leicht beweisen: Ist $\mathfrak{v}_t$ und dessen Richtungsableitung an der freien Oberfläche stetig (dies wollen wir voraussetzen) und ist $\mathfrak{v}_t$, ebenso wie V_n, klein wie β, so ist auch v_n an der freien Oberfläche stetig und klein wie β. Nur gegen den Rand der Druckfläche hin wird v_n im allgemeinen unstetig (unendlich groß).

Wir zeigen noch (der Einfachheit halber fürs ebene Problem), daß die stillschweigende Voraussetzung unendlich kleiner Neigung der freien Oberfläche zutrifft: In stetigen Bereichen ist wegen Gl. (1) $\frac{D\alpha}{Dt} = \mathfrak{e}_n \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial s}$ und wegen $\alpha = 0$ für $t = 0$ die Neigung α der freien Oberfläche klein wie $\mathfrak{v}$, also klein wie β. Dies gilt auch fürs räumliche Problem.

7. Dynamische Beziehung. Für die Änderung Δv_t der Tangentialgeschwindigkeit v_t während eines Zeitabschnitts Δt gilt in stetigen Bereichen nach Gl. (3) fürs ebene Problem:

$$\Delta v_t = \int^{\Delta t} v_n \frac{D\alpha}{Dt} dt = \int^{\Delta\alpha(\Delta t)} v_n \, d\alpha .$$

Δv_t ist folglich klein wie $v_n \Delta\alpha$, also klein wie β^2, also hinsichtlich der Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes Abb. 13 aus den Grenzbedingungen gegenüber den anderen Geschwindigkeiten vernachlässigbar klein. Da sich fürs räumliche Problem aus Gl. (6) das gleiche ergibt, gilt

Satz 5: In einem stetigen Bereich der freien Oberfläche ist die Tangentialgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_t$ zeitlich unveränderlich. Flüssigkeitsteilchen, welche seit $t = 0$ der freien Oberfläche angehören, besitzen die Tangentialgeschwindigkeit Null. Treten Flüssigkeitsteilchen hinter einer Gleitkante mit einer Tangentialgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_t$ (klein wie β) an die freie Oberfläche, so behalten sie diese unverändert bei.

Dies entspricht genau der Bedingung für den Fortbestand der Wirbelfläche hinter dem gleichen Tragflügel[16]).

Entstehung von $\mathfrak{v}_t$. Nach Satz 5 können nur neu an die Oberfläche getretene Flüssigkeitsteilchen $\mathfrak{v}_t$ besitzen. Wie bereits bemerkt, würde durch willkürlich gegebenes $\mathfrak{v}_t$ im allgemeinen an der Gleitkante unendlich große Geschwindigkeit v_n bedingt. Längs der Gleitkante muß aber nach Gl. (14) v_n endlich sein. Wir bestimmen folglich das neuentstehende $\mathfrak{v}_t$ für jeden Augenblick aus der Stetigkeitsbedingung an der Gleitkante. Dies ist zufolge der bereits gezeigten Identitäten § 6 und Satz 5 identisch mit der Berechnung der Wirbelfläche hinter dem gleichen Tragflügel aus der Stetigkeitsbedingung an der Hinterkante[17]).

8. Spritzerwurzel. Am Vorderrand wird $\mathfrak{v}$ (im allgemeinen) unstetig. Wir legen durch einen Punkt des Vorderrandes senkrecht zu diesem eine komplexe Zahlenebene z.

Beim gleichen Tragflügel sind Strömungsfunktion w_S im nahen Bereich der Vorderkante und hier ausgeübte spezifische Saugkraft $\mathfrak{S}$ gegeben durch (C = Konstante)[18])

$$w_S = C\sqrt{-z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16) \qquad \text{und} \qquad |\mathfrak{S}| = \frac{\pi}{4} \varrho C^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Wie leicht zu zeigen, ist $\mathfrak{S}$ klein wie β^2.

Beim Gleit- oder Stoßvorgang wird nach Gl. (1) durch unstetiges v_n unstetige Krümmung der freien Oberfläche bedingt. Da außerhalb der Unstetigkeit an der freien Oberfläche $\mathfrak{v}_t = 0$ ist, versuchen wir, ob im unstetigen Bereich das Geschwindigkeitsfeld w_1 nach Gl. (12) (Abb. 9) herrscht:

Wir wählen den Durchmesser des Grenzbereiches einerseits unendlich klein (klein wie β) gegenüber den Abmessungen der Druckfläche, so daß dort die der Tragflügelströmung identische

---

15) Ist im Unendlichen die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_\infty \neq 0$, so ist $\Gamma = 2\int_A^B (\mathfrak{v} - \mathfrak{v}_\infty)\, d\mathfrak{r}$ zu setzen.

16) Verf. „Über die Entstehung des dynamischen Auftriebes von Tragflügeln", ZAMM, 1925, Heft 1, § 2.

17) Verf. l. c. § 1. Dieser Vergleich ist nur dann eindeutig, wenn die Bestimmung der Wirbelstärke beim Tragflügelproblem aus der Stetigkeitsbedingung an der Kante eindeutig ist. Dies scheint aber zweifelsfrei. Sollte dies jedoch z. B. in besonderen Fällen nicht zutreffen, so müßte die Mehrdeutigkeit in eine Mehrdeutigkeit der auf Grund dieser Bedingung angesetzten Integralgleichung zum Ausdruck kommen. Die Integralgleichung ZAMM 1925, Gl. 8 scheint eindeutig zu sein.

18) Grammel, „Hydrodynamische Grundlagen des Fluges", Braunschweig 1917, S. 21.

Strömung des Gleit- oder Stoßvorganges gegeben ist durch Gl. (16), andererseits aber unendlich groß $\left(\text{groß wie } \frac{1}{\beta}\right)$ gegenüber der Spritzerdicke δ, so daß $\ln \tau$ gegenüber $\sqrt{\tau}$ vernachlässigt werden kann [vgl. Gl. (13)]. In diesem Grenzbereich gehen Hauptströmung und Wurzelströmung glatt ineinander über ($w_1 = w_S$), wenn wir längs des ganzen Vorderrandes die Spritzerdicke wählen zu [vgl. Gl. (13) mit Gl. (16) und Gl. (17)]

$$\delta = \frac{\pi C^2}{16 v_1^2} = \frac{\left|\frac{\mathfrak{S}}{2}\right|}{2 \varrho v_1^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (18).$$

Da sich δ klein wie $\mathfrak{S}$, also klein wie β^2 ergibt, erweist sich unsere Größenordnungsbetrachtung nachträglich als zulässig.

Berechnet man für den Hauptbereich gegen den Vorderrand zu die Form der freien Oberfläche entsprechend der dort herrschenden Strömungsfunktion w_S, so erkennt man, daß im Grenzbereich auch die Form der Oberfläche des Hauptbereiches glatt übergeht in die der Spritzerwurzel Gl. (9), wenn Gl. (18) erfüllt ist[19]). Ferner erkennt man, daß im Grenzbereich die Neigung der Oberfläche noch unendlich klein ist und daß hier auch $\mathfrak{v}_t$ unendlich klein ist gegenüber v_n, daß hier also die Grenzbedingungen wie im Hauptbereich erfüllt sind.

9. Zusammenfassung. Wir vergleichen unsern Gleit- oder Stoßvorgang mit der gleichen Tragflügelbewegung. Bei der gleichen Tragflügelbewegung herrscht in der Hauptebene außerhalb des Tragflügels aus Symmetriegründen der Druck $p = 0$. Die Gleichheit dieser Bedingung und die Gleichheit der Normalgeschwindigkeit V_n an Druckfläche bzw. Tragflügel, ferner die gleiche Stetigkeitsbedingung an Gleitkante bzw. Hinterkante führen dazu, daß im Hauptbereich (unterer Halbraum) in beiden Fällen jederzeit gleiche Strömungen herrschen. Nur im unendlich kleinen Unstetigkeitsbereich am Vorderrand tritt statt der Saugkraft unser Spritzer auf.

Dieses aus zwei örtlich verschiedenen Bereichen zusammengesetzte Geschwindigkeitsfeld erfüllt im Grenzfall $\beta \to 0$ (vorausgesetzt, daß Gl. (18) zeitlich stetig veränderliches δ ergibt, daß also die Stetigkeitsbedingungen § 2 erfüllt sind), längs der ganzen freien Oberfläche (Hauptbereich, Grenzbereich, Spritzerwurzel) die geometrische und die dynamische Grenzbedingung und erfüllt die Grenzbedingung $v_n = V_n$ an der Druckfläche. Haupt- und Wurzelströmung gehen glatt ineinander über; das Geschwindigkeitsfeld ist im ganzen Bereich drehungs- und quellenfrei.

Das im Spritzer abgeschleuderte Wasser bewegt sich mit zeitlich unveränderter Geschwindigkeit fort.

Kraftwirkung. Der Druck auf die Bodenfläche ist an jeder Stelle des Hauptbereiches genau so groß wie der Druck auf die untere Seite des Tragflügels, in diesem Grenzfall also halb so groß wie die Druckdifferenz zwischen Oberseite und Unterseite.

Der Wurzelbereich $\left[\text{bis } \frac{-z}{\delta} \to \infty \text{ in Gl. (11)}\right]$ ist klein wie β. Folglich ist nach Gl. (11) die im Bereich der Spritzerwurzel ausgeübte Kraft klein wie $\beta^{3/2}$ und kann bezüglich Auftrieb und Widerstand vernachlässigt werden.

Satz 6: In jedem Augenblick ist die Größe der Auftriebskraft der Bodenfläche (nichtstationäres räumliches Problem) halb so groß wie bei der gleichen Tragflügelbewegung. Auch die Lage der Kräfte stimmt in beiden Fällen überein.

Gegenüber dem Widerstand $\mathfrak{W}_T$ des gleichen Tragflügels fällt die Saugkraft weg. Für den Widerstand $\mathfrak{W}$ der Gleitfläche beim nichtstationären räumlichen Problem gilt also

$$\mathfrak{W} = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{W}_T - \int \mathfrak{S}\, d u\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (19).$$

Das Integral ist über alle Elemente du (Abb. 12) des Vorderrandes zu erstrecken.

Energiebetrachtung. Das auf der Breiteneinheit $\Delta u = 1$ der Spritzerwurzel in der Zeit dt neu entstehende Spritzervolumen $\delta v_1 dt$ besitzt eine Geschwindigkeit $2 v_1$ und folglich eine Bewegungsenergie $d T = \frac{1}{2} \varrho \cdot \delta v_1 dt \cdot (2 v_1)^2$. Mit Gl. (18) wird $d T = \mathfrak{v}_1 dt \cdot \frac{\mathfrak{S}}{2}$. Dies sagt, daß die auf dem Wege $v_1 dt$ der Vorderkante infolge Wegfalls der halben Saugkraft $\frac{\mathfrak{S}}{2}$ gegenüber dem gleichen Tragflügel erforderliche Mehrarbeit als „vernichtete" Bewegungsenergie im Spritzwasser erscheint.

[19]) Man kann auch diese Bedingung zur Aufstellung von Gl. (18) verwenden.

10. Integralgleichung der Stoßbewegung. Für den betrachteten Grenzfall $\beta \to 0$ einer Stoßbewegung sei ursprünglich ruhende Flüssigkeit bei ebener Oberfläche gegeben. Ferner sei (Abb. 14) für den ganzen zeitlichen Verlauf die Erhebung η_b aller Punkte $\mathfrak{r}_b$ der Bodenfläche gegeben, also $\eta_b = \eta_b(t, \mathfrak{r}_b)$ und daraus ihre Normalgeschwindigkeit $V_n = V_n(t, \mathfrak{r}_b)$. Es ist der zeitliche Verlauf der Kontur der Druckfläche zu suchen; die Radienvektoren $\mathfrak{r}_\varkappa$ der Kontur (vgl. Abb. 12) wollen wir angeben durch ihren Betrag $r_\varkappa(t, \lambda)$.

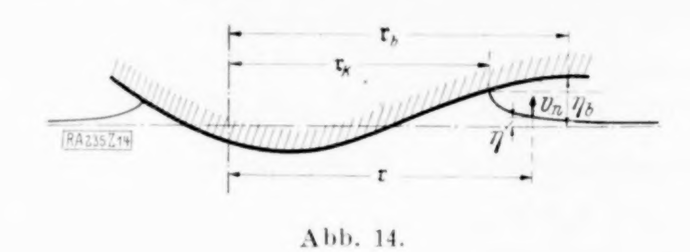


Abb. 14.

Wir denken fürs erste den zeitlichen Verlauf der Kontur $r_\varkappa(t, \lambda)$ gegeben. Durch Lösung des in Abb. 13 gezeigten Strömungsproblems in grundsätzlich bekannter Weise erhalten wir nun die Geschwindigkeit $v_n = v_n(\mathfrak{r}, t)$ für die freie Oberfläche. Wir bezeichnen diese Geschwindigkeit mit $v_n\{\mathfrak{r}, V_n[t, \mathfrak{r}_b \to r_\varkappa(t, \lambda)]\}$, um anzudeuten, daß diese Geschwindigkeit an der Stelle $\mathfrak{r}$ zur Zeit t abhängt von den gegebenen Geschwindigkeiten V_n zu dieser Zeit t für alle $\mathfrak{r}_b$, soweit $\mathfrak{r}_b$ innerhalb der augenblicklichen Kontur $r_\varkappa(t, \lambda)$ der Druckfläche liegt. Die Erhebung der Flüssigkeitsteilchen ist dann $\eta = \int_0^t v_n\, dt$. Das Flüssigkeitsteilchen hebt sich immer weiter dem Boden entgegen und erreicht ihn schließlich zur Zeit t_0, wenn seine Erhebung so groß geworden ist wie die des Bodens an dieser Stelle $\mathfrak{r}_\varkappa$ der Kontur der Druckfläche[20]) zu dieser Zeit t_0, also

$$\eta_b[t_0, r_\varkappa(t_0, \lambda)] = \int_0^{t_0} v_n\{r_\varkappa(t_0, \lambda), V_n[t, \mathfrak{r}_b \to r_\varkappa(t, \lambda)]\}\, dt \quad \ldots \ldots \quad (20).$$

Aus dieser Integralgleichung, die für jedes t_0 längs der ganzen Kontur (also von $\lambda = 0$ bis 2π) erfüllt sein muß, ist $r_\varkappa(t, \lambda)$ zu bestimmen.

Beim Gleitvorgang ist voraussetzungsgemäß der zeitliche Verlauf der Gleitkante gegeben. Die an der Gleitkante automatisch erfüllte Bedingung Gl. (20) ist nur für den Vorderrand auszuwerten. Als Komplikation kommt hinzu, daß v_n noch von $\mathfrak{v}_t$ abhängt, wobei $\mathfrak{v}_t$ seinerseits aus der als Integralgleichung aufzufassenden Stetigkeitsbedingung an der Gleitkante zu bestimmen ist. Von näheren Ausführungen wollen wir absehen.

Die folgenden Beispiele geben Lösungen für dieses Problem in besonders einfachen Fällen. Wir werden dabei aber nicht auf die allgemeine Form der Integralgleichung zurückgreifen.

III. Beispiele für unendlich flachen Boden.

11. Stationäres Gleiten. Ebenes Problem. Beim stationären Gleiten ist der Auftrieb A gleich dem halben Auftrieb des stationär bewegten gleichen Tragflügels; der Widerstand W ist gleich der halben Saugkraft dieses Tragflügels. So ist z. B. entsprechend der Tragflügeltheorie für eine kreisförmige Druckfläche mit dem Wölbungspfeil f, der Tiefe (Profiltiefe) $2c$ der Druckfläche (vgl. Abb. 15) und dem Anstellwinkel β_0 der Sehne

$$\left.\begin{aligned} \frac{A}{b} &= \pi \varrho V^2 (f + c\beta_0) & \qquad \frac{W}{b} &= \pi \varrho V^2 c \beta_0^2 \\ \frac{M}{b} &= \pi \varrho V^2 c \left(f + \frac{1}{2} c \beta_0\right) & \qquad \delta &= \frac{\pi}{2} c \beta_0^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (21).$$

M = Moment um die Vorderkante, b = (unendlich große) Spannweite. Die Gleitkraft ist immer zum Mittelpunkt der Druckfläche gerichtet.

In Abb. 15 sind für einige Druckflächen die Kräfte vergleichweise maßstäblich eingezeichnet. Wir erkennen, daß für $\beta_0 = 0$ widerstandsloses Gleiten möglich ist. Obige Gleichungen gelten auch für negatives f, nicht aber für negatives β_0, da dann die Vorderkante überspült wird und eine andere Strömung eintritt.

[20]) Eine nähere Überlegung zeigt, daß man über den Wurzelbereich integrieren kann, ohne von der speziellen Form der Unstetigkeit (Wurzelströmung) Notiz zu nehmen.

Denken wir uns die Gleitfläche ruhend und die Flüssigkeit bewegt, so erkennen wir, daß (abgesehen von unendlich kleinen Größen höherer Ordnung) die freie Oberfläche identisch ist mit der Stromlinie (Bahnlinie), die bei der Tragflügelbewegung vom Tragflügel ausgeht. Die in § 17 berechnete Plattenströmung geht für $\beta_0 \to 0$ in die hier gezeigte Strömung über.

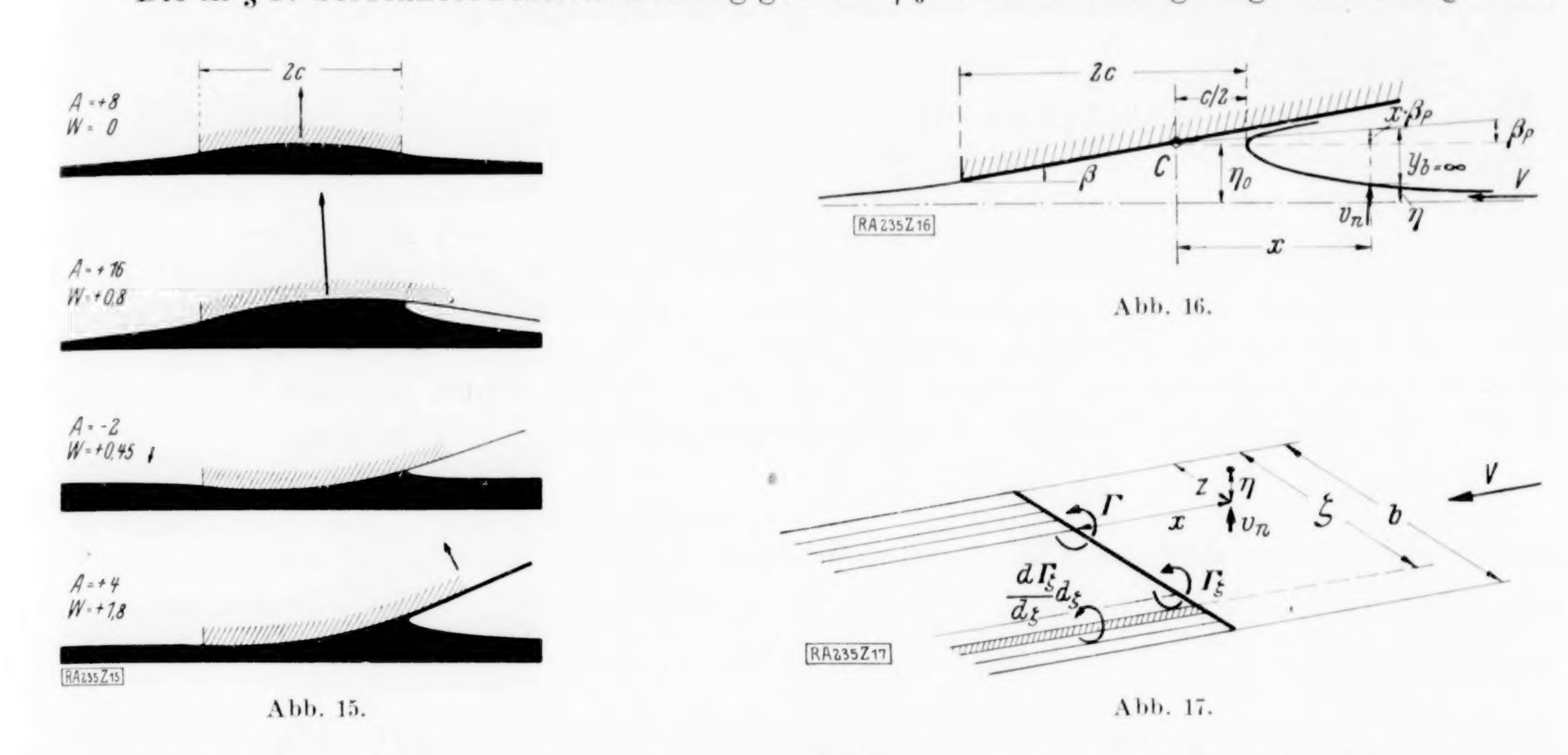


Abb. 15.

Abb. 16.

Abb. 17.

12. Stationäres Gleiten. Grenzfall breiter Gleitfläche. Die Spannweite b[21]) (Abb. 17) sei im betrachteten Grenzfall unendlich groß gegenüber der über b veränderlichen Tiefe $2c$ der Druckfläche ($b \gg 2c$). Die „Schwerpunkte" C (Abb. 16) der Zirkulation Γ um die einzelnen ebenen Profilschnitte sollen im Grundriß auf einer geraden Linie liegen[22]). Der Anstellwinkel β kann über die Spannweite veränderlich sein.

Nach der Prandtlschen Tragflügeltheorie besteht die Beziehung

$$\Gamma = 4\pi V c\,(\beta - \beta_P) \quad \text{. . . . . (22)},$$

β_P ist der Abwindwinkel nach Prandtl.

Würde man bei der Gleitfläche die Höhenlage der einzelnen Profilschnitte (den Verlauf von η_0) ändern, so würde auch die Druckfläche ihre Form ändern, die Vorderseite taucht mehr oder weniger weit ein). Unser Ziel (im Sinne des § 10) ist die Beziehung Gl. (27) zwischen dem Verlauf der Höhenlage $\eta_0 = \eta_0(z)$ der Profilschnitte und dem Verlauf der Tiefe $2c = 2c(z)$ der Druckfläche, wobei wir uns Γ in Gl. (27) durch $2c$ nach Gl. (22) ersetzt denken[23]).

Die Geschwindigkeit v_n eines Teilchens x, z der Oberfläche infolge der tragenden Linie $\Gamma_\zeta = \Gamma_\zeta(\zeta)$[24]) und infolge der Wirbelfläche $\frac{d\Gamma_\zeta}{d\zeta}d\zeta$ läßt sich nach Helmholtz ohne weiteres berechnen (Abb. 17). Da die Flüssigkeit aus dem Unendlichen mit $V = -\frac{dx}{dt}$ anströmt, ist die Erhebung η eines Teilchens

$$\eta = \int_{t=-\infty}^{t} v_n\,dt = -\frac{1}{V}\int_{x=\infty}^{x} v_n\,dx\,.$$

Einsetzen von v_n und Ausführung der Integration gibt

$$\eta = \frac{1}{4\pi V}\int_0^b \frac{\Gamma_\zeta\,d\zeta}{\sqrt{x^2+(\zeta-z)^2}} - \frac{1}{4\pi V}\int_0^b \frac{\sqrt{x^2+(\zeta-z)^2}-x}{\zeta-z}\,\frac{d\Gamma_\zeta}{d\zeta}\,d\zeta \quad \text{. . . . (23)}.$$

Das erste Glied entspricht der tragenden Linie, das zweite der Wirbelfläche.

[21]) Sämtliche Bezeichnungen sind aus Abb. 16 und Abb. 17 erkennbar. z bedeutet in diesem Beispiel die reelle Koordinate Abb. 17.

[22]) Bei Nichtzutreffen dieser Voraussetzung (z. B. im Falle eines Versuches) dürften ziemlich große Abweichungen zu erwarten sein. Andrerseits dürfte das Fallenlassen dieser Voraussetzung keine allzu großen Schwierigkeiten geben.

[23]) Dabei kann man näherungsweise β_P gegenüber β vernachlässigen.

[24]) Um die Bezeichnung Γ für die Zirkulation an der Stelle $z = \zeta$ (also hinter dem betrachteten Flüssigkeitsteilchen) vorzubehalten, bezeichnen wir die Zirkulation an allen übrigen Stellen ζ mit Γ_ζ.

Entsprechend unserm Grenzfall $b \gg 2c$ betrachten wir nun eine Stelle x, für die $b \gg x \gg 2c$[25]). Für kleine $\frac{x}{b}$ erhalten wir aus Gl. (23) durch Reihentwicklung nach $\frac{x}{\zeta - z}$ unter Beachtung der ersten Glieder (stetiges $\frac{d\Gamma_\zeta}{d\zeta}$ vorausgesetzt)[26])

$$\eta = \frac{\Gamma}{4\pi V}\left[\int_0^b \frac{\left(\frac{\Gamma_\zeta}{\Gamma} - 1\right) d\zeta}{|\zeta - z|} + \ln\frac{4z(b-z)}{x^2}\right] - \frac{\Gamma}{2\pi V} + x\beta_P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

Γ ist die Zirkulation an der Stelle $\zeta = z$ (vgl. Abb. 17).

Im Vergleich zur Strömung um die unendliche breite Platte ist die Strömung im Bereich des Profilquerschnitts um β_P geneigt (Abb. 16). Im übrigen ist aber (wie sich zeigen läßt) in naher Umgebung des Profils ($b \gg x$) die Form der Oberfläche in erster Näherung die gleiche wie beim ebenen Problem. Folglich ist (Abb. 16)

$$\eta_0 = \eta + y_{b=\infty} - x\beta_P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

$y_{b=\infty}$ läßt sich für den Grenzfall $x \gg 2c$ und für $\beta \to 0$ z. B. aus Gl. (80) ermitteln:

$$y_{b=\infty} = \frac{\Gamma}{4\pi V}\left(1 + \ln\frac{4x^2}{c^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26).$$

Wir setzen dies und η nach Gl. (24) in Gl. (25) ein[27]):

$$\eta_0 = \frac{\Gamma}{4\pi V}\left[\int_0^b \frac{\left(\frac{\Gamma_\zeta}{\Gamma} - 1\right) d\zeta}{|\zeta - z|} + \ln\frac{16z(b-z)}{c^2} - 1\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27).$$

Noch eine Betrachtung über den Widerstand. Bezeichnen wir mit $\frac{dA}{dz}$ die Auftriebsdichte, so ist, da die Kraft an jeder Stelle um β geneigt ist, der Widerstand

$$W = \int_0^b \beta \frac{dA}{dz} dz = \int_0^b \beta_P \frac{dA}{dz} dz + \int_0^b (\beta - \beta_P) \frac{dA}{dz} dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28).$$

Der erste Teil entspricht wie beim Tragflügel der Bewegungsenergie des sich „abwärts" bewegenden Wassers hinter der Gleitfläche. Der zweite Teil wird zur Erzeugung des Spritzwassers aufgewendet. Dieser Teil kann durch Wölbung des Profils vermieden werden.

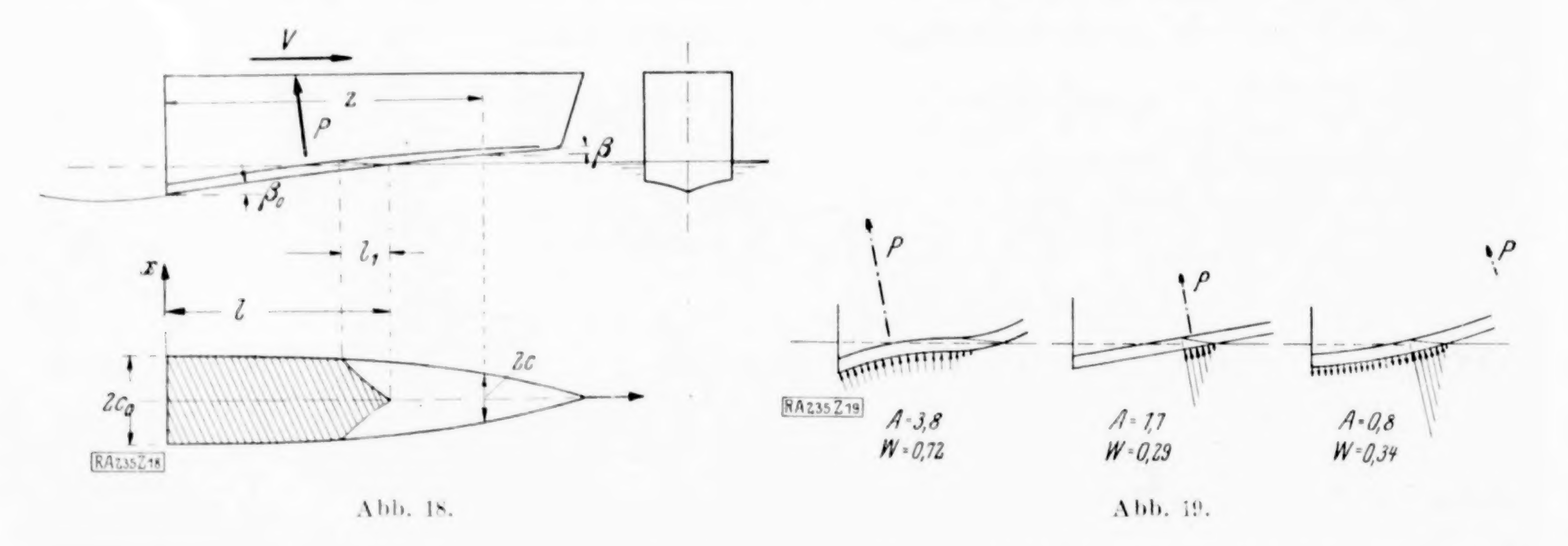


Abb. 18. Abb. 19.

[25]) Diese doppelte Kleinsetzung $2c$ gegenüber b, die wegen Gl. (24) und Gl. (26) notwendig ist, läßt erwarten, daß bei endlichen Spannweiten größere Abweichungen auftreten als bei der Prandtlschen Tragflügeltheorie. Andererseits scheint die Voraussetzung $b \gg x$ nicht allzu einschränkend, da bereits für $x \geqq +c$ bzw. für $x \leqq -1{,}8c$ die Erhebungen y der freien Oberfläche für unendlich breiten Tragflügel von den durch Gl. (26) gegebenen kaum zu unterscheiden sind.

[26]) Für $x = 0$ gibt das zweite Integral von Gl. (23) $\eta = \frac{\Gamma}{2\pi V}$. Das Glied $x\beta_P$ können wir ohne rechnerischen Nachweis hinzufügen, da β_P über $x = 0$ hinweg stetig verläuft.

[27]) Das letzte Glied in der Klammer, nämlich „-1", ist entsprechend unserm Grenzfall klein gegenüber den beiden ersten Gliedern. Es scheint aber zweckmäßig, dieses Glied bei einer zahlenmäßigen Rechnung zu berücksichtigen.

13. Stationäres Gleiten. Grenzfall langer Gleitfläche. Wir betrachten (Abb. 18) den Grenzfall $\frac{l}{2c} \to \infty$. Ist der Boden (unendlich flach) gekielt und braucht das Wasser im vorderen Teil der Gleitfläche die Länge l_1, um den seitlichen Rand des Bodens zu erreichen, so sei auch $\frac{l_1}{2c} \to \infty$.

Bewegt sich eine unendlich lange Platte von der Breite $2c$ in allseitig ausgedehnter Flüssigkeit senkrecht zu ihrer Ebene mit der Geschwindigkeit V_n, so läßt sich das Verhalten des umgebenden Wassers auf das einer mitgeführten Wassermasse von der Größe $\pi \varrho c^2$ (pro Längeneinheit der Platte) zurückführen. Hinter unserer Gleitfläche entsteht im unteren Halbraum in jeder Sekunde auf einem Stück von der Länge V das Geschwindigkeitsfeld um eine sich mit der Geschwindigkeit $V_n = V\beta_0$ abwärts bewegende Platte von der Breite $2c_0$ der Stufe. Der auf das Wasser pro Sekunde übertragene Impuls

$$B/\text{sek} = V \cdot \frac{1}{2} \pi \varrho c_0^2 \cdot V\beta_0 = P \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (29)$$

ergibt die Gleitkraft P von gleicher Größe.

Bei unendlich flach gekieltem Boden ist auf dem Stück l_1 die Druckverteilung mit $V_n = V\beta$ und $\frac{d V_n}{d t} = -V^2 \frac{d\beta}{d z}$ durch Gl. (45) gegeben; hinter l_1 treten nur bei veränderlicher Neigung des Bodens Drücke auf: $p = -\varrho V^2 \frac{d\beta}{dz}\sqrt{c^2 - x^2}$. Zur Erzeugung der hinter dem Boden im Wasser zurückbleibenden Energie wird pro Meter Weg die Arbeit

$$A/\text{Meter} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \pi \varrho c_0^2 \cdot (V\beta_0)^2 = W_0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (30)$$

verbraucht, der ein Widerstand W_0 gleicher Größe entspricht. Beim Boden mit geradem Kiel $\beta = \beta_0$ beträgt (vgl. Gl. (29)) der Gesamtwiderstand $W = P\beta_0$ gerade das Doppelte von W_0. Eine Energiemenge gleicher Größe wird also im Spritzwasser entführt, das im Bereich l_1 entsteht. Vermindert man den Winkel β im Bereich l_1, so läßt sich dieser Energieverlust im gleichen Maße verringern und schließlich ganz vermeiden. In Abb. 19 sind Kräfteverteilung und Resultierende P für einzelne Fälle dargestellt.

14. Der Aufschlag gekielter Flächen. Die ursprünglich ebene Wasseroberfläche bewege sich nach oben gegen den ruhend gedachten Boden (Abb. 20). Die Geschwindigkeit V des Wassers im Unendlichen sei in Abhängigkeit von der Zeit gegeben: $V = V(t)$.

Bei diesem Stoßvorgang ist an der freien Oberfläche im Hauptbereich die Geschwindigkeit vertikal gerichtet ($v_t = 0$). Die Geschwindigkeit am Boden fällt in Richtung des Bodens. Die durch diese Grenzbedingungen eindeutig gegebene Strömung (vgl. Abb. 20) stimmt sehr (unendlich) angenähert mit der Strömung einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit um eine ruhende ebene Platte überein (vgl. § 6). Die Breite $2c$ der Platte ist die augenblickliche Breite der Druckfläche. Die Geschwindigkeit des Wassers an einer Stelle $x > c$ der Oberfläche ist[28])

$$v_n = \frac{V}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{x^2}}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (31).$$

Die Erhebung η des Wassers, vom Momente des Eintauchens ($t = 0$) gerechnet, ist

$$\eta = \int_0^t v_n\, dt = \int_0^t \frac{V\, dt}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{x^2}}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (32).$$

[28]) Alle Angaben über Plattenströmung vgl. Lamb, l. c. S. 92.

Die Breite $2c$ der Druckfläche nimmt mit der Zeit zu: $c = c(t)$. Wählen wir fürs erste c als unabhängige Variable, also $t = t(c)$ und auch $V = V(c)$, so können wir $dt = \frac{dt}{dc} \cdot dc$ setzen, also (wegen u siehe weiter unten)

$$\eta = \int_{c=0}^{c \leq x} \frac{V \frac{dt}{dc}}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{x^2}}} dc = \int_{c=0}^{c \leq x} \frac{u(c)\, dc}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{x^2}}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (33).$$

Im Augenblick, wenn unser Wasserteilchen an der Stelle x die Kontur der Druckfläche erreicht, ist $c = x$ und $\eta = \eta_b$ geworden:

$$\eta_b = \int_0^x \frac{V \frac{dt}{dc}}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{x^2}}} dc = \int_0^x \frac{u(c)\, dc}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{x^2}}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (34).$$

Die beiden abhängig Veränderlichen V und $\frac{dt}{dc}$ haben wir in

$$u = u(c) = \frac{V}{\frac{dc}{dt}} = \frac{V}{v_1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (35)$$

zusammengefaßt. Gl. (34) muß für alle x gelten; sie ist als Integralgleichung zur Bestimmung von $u(c)$ aufzufassen (vgl. § 10). Die unendlich kleine Größe u ist eine rein geometrische Größe; sie hängt nur von $\eta_b(x)$, nicht aber von $V = V(t)$ ab. Es wird immer möglich sein, die gegebene Bodenform durch die Reihe

$$\eta_b = \beta x + \beta_1 x^2 + \beta_2 x^3 + \beta_3 x^4 + \beta_4 x^5 + \ldots \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (36a)$$

darzustellen. Die Lösung von Gl. (34) lautet dann (Probe durch Einsetzen!)

$$u = u(c) = \frac{2}{\pi} \beta + \beta_1 c + \frac{4}{\pi} \beta_2 c^2 + \frac{3}{2} \beta_3 c^3 + \frac{16}{3\pi} \beta_4 c^4 + \ldots \quad \ldots (36b).$$

Ist nun V_n z. B. in Abhängigkeit von t gegeben, so kann man nach Gl. (35), nämlich aus

$$\int_0^c u(c)\, dc = \int_0^t V_n(t)\, dt \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (37)$$

$c = c(t)$ bestimmen. Die Form der Wasseroberfläche $\eta = \eta(x)$ läßt sich aus Gl. (33) bestimmen, indem man nach Ausführung der Integration jeweils c als gegeben und x als veränderlich ansieht. Man erhält z. B. für geradlinig gekielten Boden

$$\eta = \frac{2}{\pi} \beta \cdot x \arcsin \frac{c}{x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (38).$$

Um die Kraft P auf den Körper zu bestimmen, denken wir uns die Flüssigkeit ursprüglich ruhend und den Körper gegen die Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit $V = V(t)$ bewegt. Die „Bewegungsgröße" der Flüssigkeit ist

$$B = \frac{\pi}{2} \varrho c^2 V \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (39).$$

Durch Differentiation nach t bei Beachtung von Gl. (35) erhalten wir

$$P = \pi \varrho c \frac{V^2}{u} + \frac{\pi}{2} \varrho c^2 \frac{dV}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (40).$$

Für den besonderen Fall, daß ein Körper von gegebener Masse m mit der ursprünglichen Geschwindigkeit V_0 aufs Wasser aufschlägt, setzen wir die Bewegungsgröße der Flüssigkeit (Gl. 39) gleich der vom Körper abgegebenen Bewegungsgröße $m(V_0 - V)$ und erhalten

$$V = \frac{V_0}{1 + \mu} \quad \ldots \ldots (41), \qquad \text{wobei} \quad \mu = \frac{\pi \varrho c^2}{2m} \quad \ldots \ldots (42).$$

Setzen wir $P = -m \frac{dV}{dt}$ in Gl. (40) ein, so erhalten wir bei Beachtung von Gl. (41) und Gl. (42)

$$P = \frac{\pi \varrho c V_0^2}{(1+\mu)^3 \cdot u} \quad \text{. . . . . (43).}$$

Dies gibt z. B. für den geradlinig gekielten Boden $\eta_b = \beta x$, also $u = \frac{2}{\pi} \beta$:

$$P = \frac{\pi^2}{2} \frac{\varrho c V_0^2}{(1+\mu)^3 \cdot \beta} \quad \text{. . . . . (43a).}$$

Es mag interessieren, welche Form man dem Boden bei gegebener Masse des Körpers geben muß, damit $P = P_0$ zeitlich konstant ist. Man hat dann $u = u(c)$ entsprechend Gl. (43) in Gl. (34) einzusetzen und für konstantes $P = P_0$ zu integrieren, wobei aber zu beachten ist, daß μ nach Gl. (42) von c abhängt. Die Integration ergibt

$$\eta_b = \frac{m V_0^2}{2 P_0} \frac{\mu_x}{1+\mu_x} \left[1 + \frac{3}{2(1+\mu_x)} + \frac{3 \ln(\mu_x + \sqrt{1+\mu_x})}{2\sqrt{\mu_x(1+\mu_x)^3}}\right] \quad \text{. . . . (44),}$$

wobei $\mu_x = \frac{\pi \varrho x^2}{2m}$. Ein Boden dieser Art ist in Abb. 21 dargestellt.

Wir berechnen die Druckverteilung am Boden. Für $|x| < c$ ist das Geschwindigkeitspotential $\varphi = -V\sqrt{c^2 - x^2}$. Der Flüssigkeitsdruck p ist[29])

$$p = -\varrho \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} v_x^2 + F(t)\right].$$

Mit $\varphi = \varphi(V, c)$ und $v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ erhalten wir mit Gl. (35)

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{V^2}{u} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2}}} + \frac{dV}{dt}\sqrt{c^2 - x^2} - \frac{1}{2} \frac{V^2}{\frac{c^2}{x^2} - 1} \quad \text{. . . . . (45).}$$

Das letzte Glied, das vom Geschwindigkeitsquadrat herrührt, ist unendlich klein gegenüber den beiden ersten Gliedern, die von $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ herrühren (dies gilt nicht für den Bereich der Spritzerwurzel).

Für den Fall des Aufschlags eines Körpers mit gegebener Masse m erhält man aus Gl. (41) und Gl. (43)

$$p = \frac{P}{\pi c} \left[\frac{1+\mu}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2}}} - 2\mu \sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2}} - \frac{u(1+\mu)}{2\left(\frac{c^2}{x^2} - 1\right)}\right] \quad \text{. . . . . . (46).}$$

Das erste Glied, das von $\frac{dc}{dt}$ herrührt, gibt am Rand der Druckfläche große positive Drücke, während das zweite Glied n e g a t i v e Drücke mit elliptischer Verteilung ergibt, welche dadurch entstehen, daß gleichzeitig mit dem Körper auch das Wasser im Verlauf des Aufschlages verzögert wird. Da dem ersten Glied in der Mitte des Bodens verhältnismäßig geringe Drücke entsprechen, kommt es in praktischen Fällen sehr wohl vor, daß in der Mitte des Bodens negativer Druck herrscht, während am Rande der Druckfläche sehr hohe positive Drücke, die in ihrer Gesamtheit überwiegen, die Verzögerung des Aufschlages bedingen. Hat die Druckfläche schließlich den seitlichen Rand des Bodens erreicht, so ist der Stoßvorgang beendet.

Wir berechnen die Spritzerdicke δ. Wir legen (vgl. § 8) bei der Plattenströmung (vgl. Abb. 20 unten) den Ursprung der komplexen Koordinate z in dem Punkt $x = c$. Die komplexe Strömungsfunktion der Plattenströmung $w_p = iV\sqrt{2cz}\sqrt{\frac{z}{2c} - 1}$ geht für kleine z über in $w_p = V \cdot \sqrt{2c}\sqrt{-z}$. Durch Vergleich mit Gl. (13) erhalten wir

$$\delta = \frac{\pi}{8} c u^2 \quad \text{. . . . . (47).}$$

[29]) Lamb, l. c. S. 20.

Den gleichen Wert δ erhalten wir, wenn wir im Bereich kleiner z die Form der Oberfläche der Spritzerwurzel gleichsetzen der Form der Oberfläche der Hauptströmung oder wenn wir die vom aufschlagenden Körper abgegebene Energie gleichsetzen der Bewegungsenergie der Hauptströmung plus derjenigen der Spritzerströmung (vgl. § 9). Es sei bemerkt, daß bei Beginn des Aufschlags die halbe Bewegungsenergie der Flüssigkeit im Spritzer enthalten ist; gegen Ende des Aufschlags enthält der Spritzer fast die gesamte vom Körper abgegebene Bewegungsenergie.

Um den Übergang von Plattenströmung in Spritzerströmung bei endlichem Kielungswinkel zu zeigen, sind in Abb. 22 für den Wurzelbereich Form von freier Oberfläche Gl. (33) und Druckverteilung Gl. (45) entsprechend der Plattenströmung für endlichen Winkel $\beta = 0{,}1$ verglichen mit diesen Angaben aus der Spritzerströmung. (Gl. (9) bzw. Gl. (10).

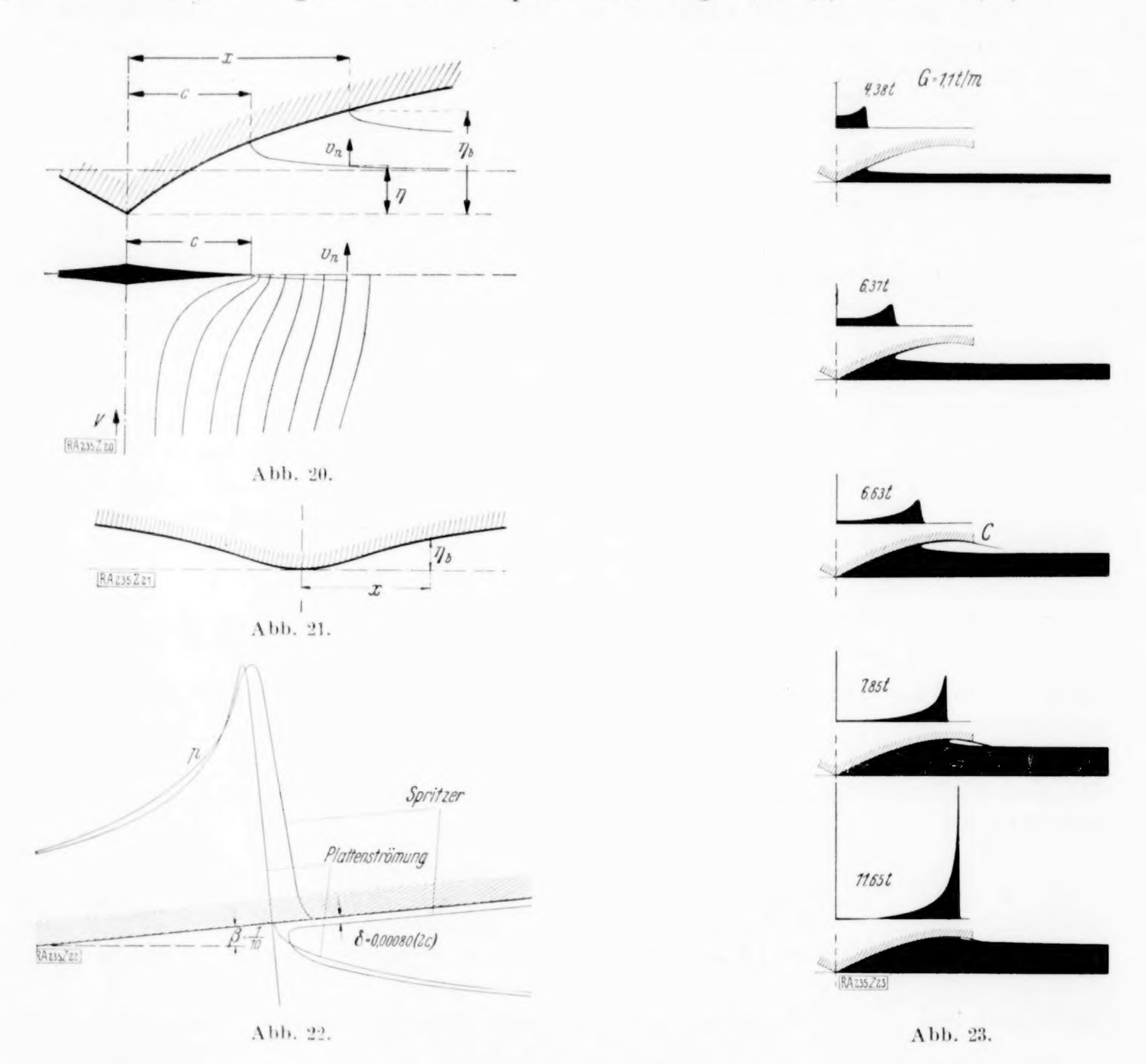


Abb. 20. Abb. 21. Abb. 22. Abb. 23.

Abb. 23 zeigt den Druckverlauf während des Aufschlags eines Körpers von $2b = 2\,m$ Breite, 1100 kg Gewicht pro Meter Länge bei einer Sinkgeschwindigkeit $V_0 = 5$ m/sek. Die angegebenen Zahlen sind die Stoßkräfte in Tonnen.

15. Aufsetzen einer Stufe. Ebenes Problem. Als Beispiel einer nichtstationären Gleitbewegung besprechen wir das Aufsetzen einer Stufe (Abb. 24). Wir denken uns gegeben: die zeitlich konstante Geschwindigkeit W[30]) der Stufe und die Normalgeschwindigkeit $W_n = W(\beta + \varkappa)$; ferner die (zeitlich veränderliche) Tiefe $2c$ der Druckfläche im Vergleich zum Weg Wt, den die Stufe in der Zeit t zurückgelegt hat; der Kürze halber wählen wir die Zeit t, in welcher $c = 1$ ist. Das Ziel unserer Rechnung, nämlich (im Sinne des § 10) die Ermittlung von β bzw. $\varkappa$, erreichen wir über die Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes und die Berechnung der freien Oberfläche (insbesondere von η_1).

Wir erkennen (vgl. § 16), daß eine zentrisch ähnliche Flüssigkeitsbewegung entsteht. Ähnlichkeitszentrum ist der Punkt der ursprünglichen Oberfläche, an dem die Stufe aufsetzte

30) In diesem Beispiel bezeichnen wir die Körpergeschwindigkeit mit W statt wie bisher mit V.

(in Abb. 24 der Ausgangspunkt des Vektors Wt). Auf dem von der Gleitkante überstrichenen Stück der freien Oberfläche $x_0 \geqq x \geqq c$ besteht eine Horizontalgeschwindigkeit v_t (vgl. § 7), welcher bei der gleichen Tragflügelbewegung eine Wirbelfläche mit dem Geschwindigkeitssprung $u = 2 v_t$ entspricht. Da die Größe von u an jeder Stelle zeitlich unveränderlich ist (Satz 5), wegen der Ähnlichkeit aber Zirkulation um die Wirbelfläche und Länge derselben linear mit der Zeit zunehmen, muß auf dem Stück $x_0 \geqq x \geqq c$ die Größe $u = 2 v_t$ der Unstetigkeit auch örtlich konstant sein.

Um das Geschwindigkeitsfeld zu beherrschen, müssen wir vor allem den Zusammenhang zwischen W_n und u kennen[31]). Wir bezeichnen (Abb. 25) die Koordinaten der einzelnen Wirbelfäden mit ξ, die Zirkulation um einen Faden mit $u\, d\xi$. In der konformen Abbildung der Plattenströmung um einen Kreiszylinder bezeichnen wir alle Größen mit den großen Buchstaben. Es gilt[32])

$$X = x + \sqrt{x^2 - 1} \quad . \quad . \quad (48) \qquad \text{und} \qquad \Xi = \xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \quad . \quad . \quad (49).$$

Das Geschwindigkeitsfeld zerlegen wir in die beiden Felder I und II.

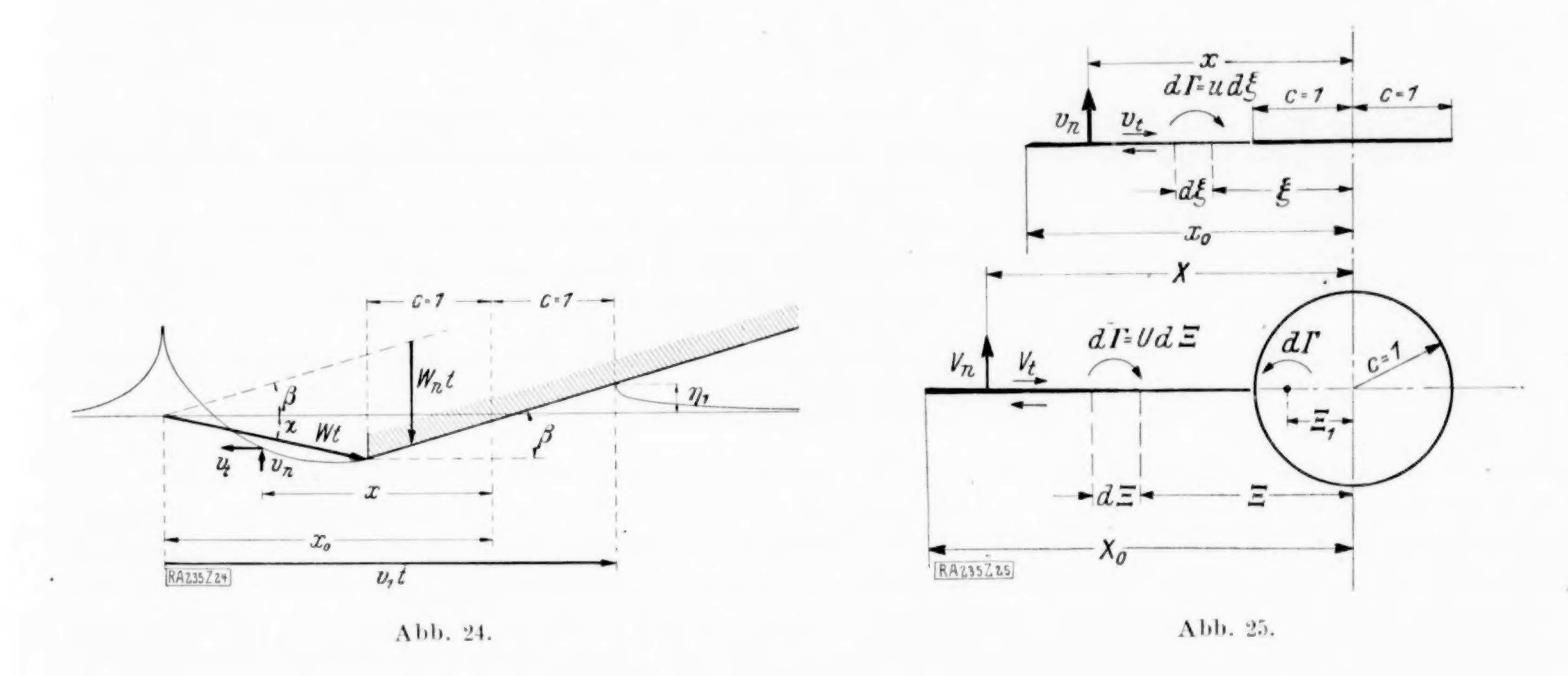


Abb. 24. Abb. 25.

Geschwindigkeitsfeld I infolge Zirkulation um Wirbelfläche und ruhend gedachten Tragflügel bei ruhender Flüssigkeit im Unendlichen. Die Geschwindigkeit an einer Stelle X der Oberfläche im System der Kreiskontur infolge eines Wirbelfadens ist mit $\Xi_1 = \frac{1}{\Xi}$[33]):

$$d\, V_{n\,\mathrm{I}} = -\frac{d\,\Gamma}{2\,\pi\,(\Xi - X)} - \frac{d\,\Gamma}{2\,\pi\,(X - \Xi_1)}.$$

Da sich bei der konformen Abbildung die Zirkulation nicht ändert, gilt $d\,\Gamma = U\,d\,\Xi = u\,d\,\xi$. Folglich ist

$$V_{n\,\mathrm{I}} = -\frac{u}{2\,\pi}\int\limits_1^{X_0}\left(\frac{1}{\Xi - X} + \frac{\Xi}{\Xi\,X - 1}\right)\frac{d\,\xi}{d\,\Xi}\,d\,\Xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50).$$

Wir setzen $\frac{d\,\xi}{d\,\Xi}$ nach Gl. (49) ein und integrieren. Bei konformer Abbildung ist $v = V\frac{d\,X}{d\,x}$. Wir multiplizieren daher Gl. (50) mit $\frac{d\,X}{d\,x}$ entsprechend Gl. (48) und erhalten:

$$v_{n\,\mathrm{I}} = -\frac{u}{2\,\pi}\left(\frac{X^2+1}{X^2-1}\ln X_0 + X\,\frac{X_0 - X_0^{-1}}{X^2 - 1} + \ln\left|\frac{X_0 - X}{X_0\,X - 1}\right|\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51).$$

[31]) Aus Verf. l. c. Gl. (8) ergibt sich mit unseren Bezeichnungen für u = konst ohne weiteres unsere Gl. (54). Wir haben hier den Weg so wiederholt, daß wir auch die Geschwindigkeiten v_n an der freien Oberfläche erhalten (Gl. 55).

[32]) Verf. l. c. Gl. (4).

[33]) Verf. l. c. Gl. (5).

An der Gleitkante wird für $X \to 1$

$$v_{n\,\mathrm{I}} = \lim_{X \to 1} \left[-\frac{u}{2\pi} \frac{1}{X^2 - 1} (X_0 - X_0^{-1} + 2 \ln X_0) \right] \quad \text{(52).}$$

Geschwindigkeitsfeld II ist das zirkulationsfreie Feld um den mit W_n bewegten Tragflügel bei ruhender Flüssigkeit im Unendlichen. Es ist[34]) $v_{n\,\mathrm{II}} = W_n \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} - 1 \right)$. Wir führen entsprechend Gl. (48) statt x die Variable X ein:

$$v_{n\,\mathrm{II}} = W_n \frac{2}{X^2 - 1} \quad \text{(53).}$$

Gesamtfeld. Damit nach Bedingung § 7 an der Gleitkante (für $X \to 1$) $v_n = v_{n\,\mathrm{I}} + v_{n\,\mathrm{II}}$ endlich bleibt, muß nach Gl. (52) und Gl. (53) gelten

$$u = 2 v_t = \frac{4 \pi W_n}{X_0 - X_0^{-1} + 2 \ln X_0} \quad \text{(54).}$$

Wir setzen W_n nach dieser Gleichung in Gl. (53) ein und bilden mit Gl. (51) $v_n = v_{n\,\mathrm{I}} + v_{n\,\mathrm{II}}$

$$v_n = -\frac{u}{2\pi} \left(\frac{X_0 - X_0^{-1}}{X + 1} + \ln \left| \frac{X - X_0}{X - X_0^{-1}} \right| \right) \quad \text{(55).}$$

Die Erhebungen η berechnen wir am einfachsten mit Gl. (75), wobei in unserm Grenzfall $s = x_0 - x$ ist. So wird z. B. im Bereich negativer x:

$$\eta = (x_0 - x) \int_{-\infty}^{x} \frac{v_n t}{(x_0 - x)^2} \, d x \quad \text{(56).}$$

Damit ist auch η_1 für $x = -1$ bekannt. Wegen $2 c \beta - W t \varkappa = \eta_1$ (vgl. Abb. 24) und $W_n = W(\varkappa + \beta)$ sind jetzt die Winkel $\varkappa$ und β einzeln bekannt.

Um die Spritzerdicke δ zu ermitteln, legen wir den Ursprung unseres Koordinatenkreuzes in die Spritzerwurzel ($x = -1$) und entwickeln v_n (Gl. (55)) nach Potenzen dieser neuen Abszisse. Diese Geschwindigkeit v_n vergleichen wir mit $v_n = \left| \frac{d w_1}{d z} \right|$ für reelle $z > 0$ nach Gl. (13), wobei nach Abb. 24 für die Geschwindigkeit v_1 der Spritzerwurzel gilt $v_1 = \frac{x_0 + 1}{x_0 - 1} W$. Wir erhalten mit unseren alten Bezeichnungen

$$\delta = \frac{\pi}{2} \left(\frac{X_0 - 1}{X_0 + 1} \right)^4 \left(\frac{\varkappa + \beta}{1 + \frac{2 \ln X_0}{X_0 - X_0^{-1}}} \right)^2 \quad \text{(57).}$$

Wir ermitteln die Kraft ($2 P$) auf den zugeordneten Tragflügel[35]). Es ist[36])

$$\int_{F_T + F_n'} \varphi \, d F = \pi W_n + \int_1^{X_0} \left(\xi - \frac{1}{\Xi} \right) u \, d \xi = \frac{B}{\varrho} \quad \text{(58),}$$

wobei wir $b = 1$, $v_p \sin \beta = W_n$, $\Gamma = u \, d \xi$ gesetzt haben und statt x_0, X_0 unsere Bezeichnungen ξ, Ξ eingeführt haben. Ferner haben wir bereits das Integral über alle Wirbelfäden $u \, d \xi$ angedeutet. B ist die „Bewegungsgröße" der Flüssigkeit.

[34]) Lamb, l. c. S. 92.
[35]) Verf. l. c. Gl. (24).
[36]) Verf. l. c. Gl. (28), (29), (31).

Es ist $(2P) = \frac{DB}{Dt}$. Da (vgl. § 16) sowohl das Potential φ wie auch die Flächen linear mit t zunehmen, ist B proportinal t^2, also $\frac{DB}{Dt} = \frac{2B}{t}$. Nach Abb. 24 können wir setzen $t = \frac{x_0 - 1}{W}$. Durch Ausführung der Integration Gl. (58) erhalten wir schließlich die Gleitkraft:

$$P = \frac{\varrho W u}{8(x_0 - 1)}(1 + X_0)^2 (1 - X_0^{-2}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59).$$

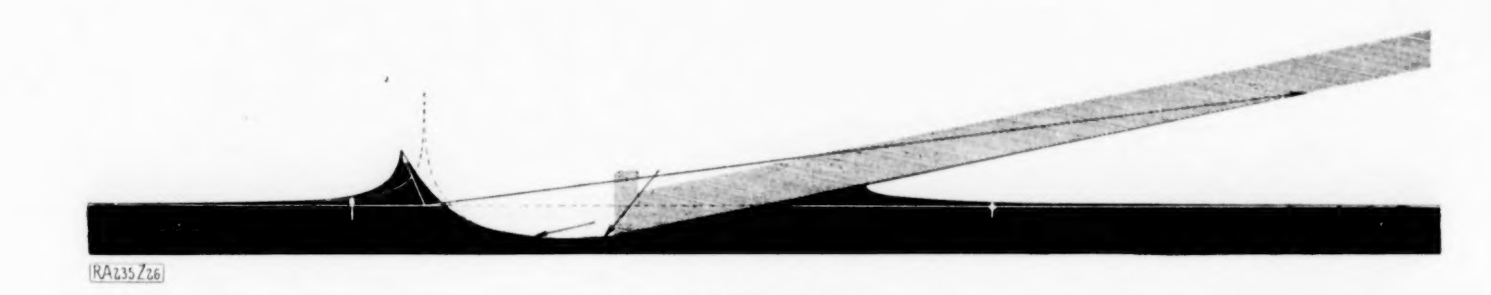


Abb. 26.

Ich habe das Beispiel $x_0 = 2{,}5\,c$ durchgerechnet. Es ergab sich (Gl. (54)) $v_t = 0{,}813\,W_u$, ferner nach Berechnung von η_1 nach Gl. (56) $\beta = 1{,}25\,\varkappa$; die Oberfläche ist für $\beta = 0{,}21$ in Abb. 26 gezeichnet. Im Bereich um $x = x_0$ ist wegen Unstetigkeit (Neigung der Oberfläche nicht unendlich klein) unsere Rechnung ungültig. Hier geben aber Satz 3 und Gl. (64) und Gl. (65) auch ohne Rechnung guten Anhalt für das Zeichnen der Oberfläche. An einzelnen Stellen der Oberfläche ist die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ eingezeichnet.

IV. Verschiedene Grenzfälle.

16. Zentrisch ähnliche Flüssigkeitsbewegung. Wir lassen die Annahme unendlich kleiner Neigung der Oberfläche fallen. Taucht z. B. der geradlinig gekielte Boden mit zeitlich konstanter Geschwindigkeit V_0 in die Flüssigkeit ein, so ist diese Flüssigkeitsbewegung, wie leicht einzusehen, dem allgemeinen dynamischen Ähnlichkeitsgesetz unterworfen: Die Formen der Oberfläche zu verschiedenen Zeiten sind geometrisch ähnlich und an einander entsprechenden Stellen herrschen dann die gleichen Geschwindigkeiten. Denken wir uns die Flüssigkeit gegen den ruhenden Boden bewegt, so stellt der tiefste Punkt des Bodens das Ähnlichkeitszentrum 0 dar.

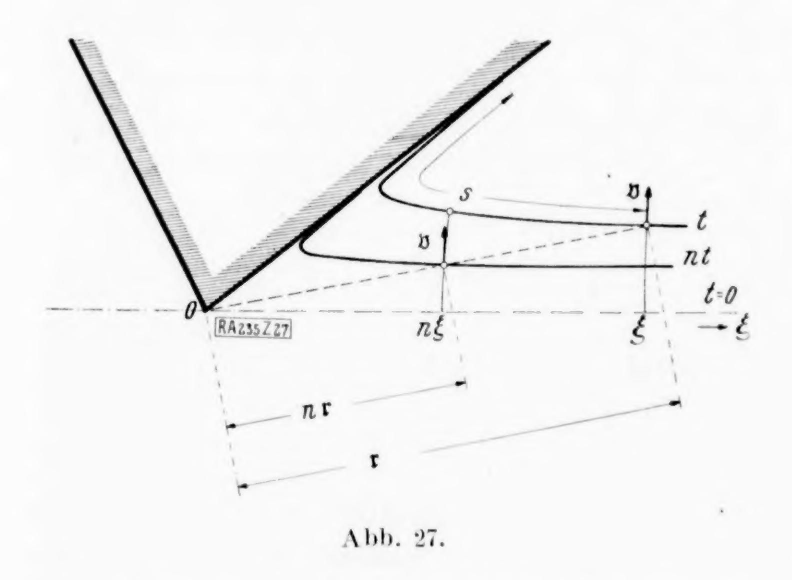
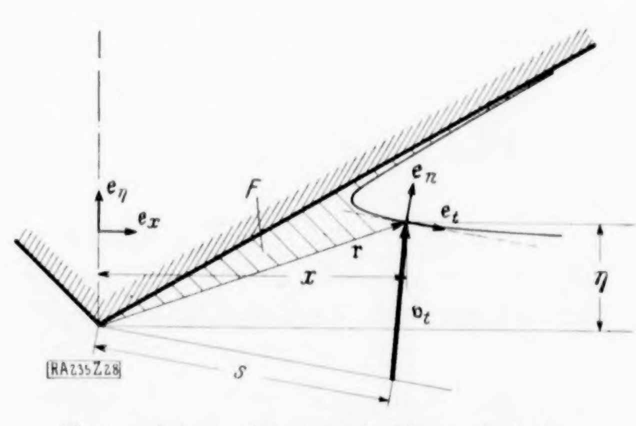


Abb. 27.



Korrektur: Es muß heißen $\mathfrak{v}t$ statt $\mathfrak{v}_t$.

Abb. 28.

Wir kennzeichnen (Abb. 27) die einzelnen Flüssigkeitsteilchen der freien Oberfläche durch ihre Abszissen ξ zur Zeit $t = 0$. Ihre Lage zu einer späteren Zeit t werde gegeben durch den auf 0 bezogenen Radiusvektor $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(\xi, t)$. Die Geschwindigkeit ist $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}(\xi, t) = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t}$. Das Ähnlichkeitsgesetz sagt aus (Abb. 27): Hat ein Flüssigkeitsteilchen ξ zur Zeit t die Lage $\mathfrak{r}$ und die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, so hatte (mit $n < 1$) das Flüssigkeitsteilchen $n\,\xi$ zur Zeit $n\,t$ die Lage $n\,\mathfrak{r}$ und die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$. Mathematisch formuliert:

$$\frac{\mathfrak{r}}{t} = \frac{\mathfrak{r}}{t}\left(\frac{\xi}{t}\right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t} = \mathfrak{v} = \mathfrak{v}\left(\frac{\xi}{t}\right).$$

Wir differenzieren beide Gleichungen partiell nach t

$$\frac{\mathfrak{v}}{t} - \frac{\mathfrak{r}}{t^2} = -\frac{d\,\frac{\mathfrak{r}}{t}}{d\,\frac{\xi}{t}}\,\frac{\xi}{t^2} \quad . \; . \; . \; (60) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} = -\frac{d\,\mathfrak{v}}{d\,\frac{\xi}{t}} \cdot \frac{\xi}{t^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (61).$$

Für einen bestimmten Zeitpunkt t führen wir als unabhängige Variable statt ξ die Bogenlänge $s = s(\xi)$ der freien Oberfläche ein: $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(s)$, $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}(s)$. Die Gl. (60), (61) nehmen jetzt die Form an

$$\mathfrak{v}\,t - \mathfrak{r} = -\frac{d\,\mathfrak{r}}{d\,s} \cdot \xi \frac{d\,s}{d\,\xi} \quad . \; . \; . \; (62) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} = -\frac{d\,\mathfrak{v}}{d\,s} \cdot \frac{d\,s}{d\,\xi} \cdot \frac{\xi}{t} \quad . \; . \; . \; . \; (63).$$

Gl. (63) zeigt, daß $\frac{d\,\mathfrak{v}}{d\,s}$ die Richtung von $\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t}$ besitzt, also wegen der dynamischen Grenzbedingung senkrecht zur Oberfläche $\frac{d\,\mathfrak{r}}{d\,s}$ gerichtet ist. Wir differenzieren Gl. (62) nach s

$$t\,\frac{d\,\mathfrak{v}}{d\,s} - \frac{d\,\mathfrak{r}}{d\,s} = -\frac{d^2\,\mathfrak{r}}{d\,s^2}\,\xi\,\frac{d\,s}{d\,\xi} - \frac{d\,\mathfrak{r}}{d\,s}\,\frac{d}{d\,s}\left(\xi\,\frac{d\,s}{d\,\xi}\right).$$

Die ersten Glieder beider Seiten stehen senkrecht auf $\frac{d\,\mathfrak{r}}{d\,s}$. Folglich ist $\frac{d}{d\,s}\left(\xi\,\frac{d\,s}{d\,\xi}\right) = 1$. Mit Konstanten A und B ist $\xi\,\frac{d\,s}{d\,\xi} = s + A$ und daraus $s + A = B\,\xi$. Mit $\frac{d\,\mathfrak{r}}{d\,s} = \mathfrak{e}_t$ geht Gl. (62) über in $\mathfrak{v}\,t = \mathfrak{r} - \mathfrak{e}_t\,(s + A)$. In unserm Fall (Abb. 27) ist $\xi = 0$ für $s = 0$ und $\frac{d\,s}{d\,\xi} = 1$ für $\xi = \infty$. Folglich ist $A = 0$, $B = 1$; also

$$\mathfrak{v}\,t = \mathfrak{r} - \mathfrak{e}_t\,s \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (64) \qquad \text{und} \qquad s = \xi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (65).$$

Gl. (64) sagt aus (Abb. 28): Bei bekannter Form der freien Oberfläche erhält man für einen Punkt derselben den andern Endpunkt des Vektors $\mathfrak{v}\,t$, indem man vom Ähnlichkeitszentrum aus die Bogenlänge s der freien Oberfläche, vom Ende des Spritzers gerechnet, parallel zur Tangente an die Oberfläche aufträgt[37]).

Gl. (64) läßt sich (durch Multiplikation mit $\mathfrak{e}_n$ und $\mathfrak{e}_t$) ersetzen durch die beiden skalaren Beziehungen

$$v_n\,t = \mathfrak{e}_n\,\mathfrak{r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (66) \qquad \text{und} \qquad v_t\,t = \mathfrak{e}_t\,\mathfrak{r} - s \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (67).$$

Daraus folgt mit $d\,\psi = v_n\,d\,s$ bzw. $d\,\varphi = v_t\,d\,s$

$$\psi\,t = 2\,F + \text{konst} \quad . \; . \; . \; (68) \qquad \text{und} \qquad \varphi\,t = \frac{1}{2}\,(s^2 - r^2) + \text{konst} \quad . \; . \; (69).$$

ψ Stromfunktion, φ Potential. F ist die in Abb. 28 schraffierte Fläche.

---

[37]) Es sei erwähnt, daß die Umrandung des dem Flüssigkeitsraum entsprechenden Bereiches der Hilfsgröße $h = \int^z \sqrt{\frac{d\,v}{d\,z}}\,d\,z$ geradlinig verläuft. Die Geschwindigkeitsänderung in Richtung der freien Oberfläche steht nämlich nach Gl. (63) senkrecht auf die Richtung der Oberfläche, so daß mit $v = v_x - i\,v_y$ das Produkt $d\,v\,d\,z$ an der freien Oberfläche die Richtung der imaginären Achse besitzt. $\sqrt{d\,v\,d\,z} = \sqrt{\frac{d\,v}{d\,z}}\,d\,z$ besitzt also längs der freien Oberfläche die Richtung $\pm\frac{\pi}{4}$. Längs des Bodens besitzt es die Richtung der reellen Achse (vgl. nebenstehende Abb. 34).

Bei Aufstellung einer zweiten, von der obigen unabhängigen komplexen Beziehung ist man versucht, davon Gebrauch zu machen, daß (vgl. Abb. 28) $\frac{d\,z}{z - v_x - i\,v_y}$ an der freien Oberfläche reell ist. Da dies aber die zu v konjugierte Größe enthält, ist es mir nicht gelungen, eine geschlossene Lösung für das ganze Problem zu finden.

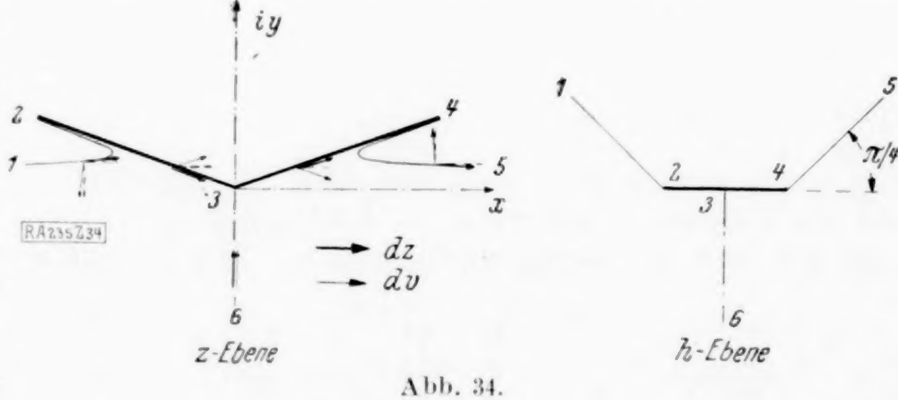


Abb. 34.

Für spätere Zwecke leiten wir noch eine Beziehung ab. Das im Zeitpunkt t_0 an der Stelle $\mathfrak{r}_0$ der Oberfläche befindliche Flüssigkeitsteilchen ξ_0 hat sich im Verlauf von t_0 um $\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{e}_x \xi_0 = \int_0^{t_0} \mathfrak{v}\, d t$ verschoben. Nach dem Ähnlichkeitsgesetz (Abb. 27) war die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ dieses Teilchens zu einer kleineren Zeit t ebenso groß wie die augenblickliche Geschwindigkeit des Teilchens $\xi = \frac{t_0}{t}\xi_0$. Wir können daher $d t = -\frac{1}{\xi^2} t_0 \xi_0 d\xi$ in unser Integral einsetzen. Wegen Gl. (65) $s = \xi$ gilt also

$$\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{e}_x s_0 = s_0 t_0 \int_{s_0}^{\infty} \frac{\mathfrak{v}}{s^2} d s \quad \ldots \quad (70).$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $\mathfrak{e}_\eta$ (Abb. 28) und erhalten Gl. (75). Dabei haben wir die nicht mehr notwendigen Indizes 0 weggelassen.

Stoßkraft. Die Stoßkraft auf den Körper sei $\mathfrak{P}_T$, seine benetzte Bodenfläche F_T, die freie Oberfläche der Flüssigkeit F_0. Denken wir uns die Flächenelemente $d\mathfrak{f}$ von der Flüssigkeit nach außen gerichtet, so wird[38])

$$\mathfrak{P}_T = -\varrho \frac{D}{D t} \int_{F_T + F_0} \varphi \, d\mathfrak{f} .$$

Da wegen der Ähnlichkeit φ und F linear mit der Zeit t wachsen, ist der Integralwert proportional t^2. Seine zeitliche Änderung ist folglich das $\frac{2}{t}$-fache seines jeweiligen Wertes. Also

$$t\,\mathfrak{P}_T = -2\varrho \int_{F_T} \varphi \, d\mathfrak{f} - 2\varrho \int_{F_0} \varphi \, d\mathfrak{f} \quad \ldots \quad (71).$$

Wegen des linearen Anwachsens von $\mathfrak{P}_T$ und wegen der konstanten Aufschlaggeschwindigkeit V_0 des Körpers ist die der Flüssigkeit zugeführte Energie $E = -\frac{1}{2}\mathfrak{V}_0 t \cdot \mathfrak{P}_T$. Folglich ist[39])

$$-\mathfrak{V}_0 t\,\mathfrak{P}_T = \varrho \int_{F_T} \varphi\, \mathfrak{v}\, d\mathfrak{f} + \varrho \int_{F_0} \varphi\, \mathfrak{v}\, d\mathfrak{f} + \varrho \int_{F_\infty} \varphi\, \mathfrak{v}\, d\mathfrak{f} \quad \ldots \quad (72).$$

Wie sich zeigen läßt, wird das Integral über die unendlich ferne Grenzfläche F_∞ unendlich klein; es kann weggelassen werden. An der Körperoberfläche F_T ist wegen der geometrischen Grenzbedingung $\mathfrak{v}\, d\mathfrak{f} = \mathfrak{V}_0\, d\mathfrak{f}$. Wir heben daher aus dem ersten Integral der rechten Seite $\mathfrak{V}_0$ heraus, multiplizieren Gl. (71) mit $\mathfrak{V}_0$ und eliminieren aus Gl. (71) und Gl. (72) das erste Integral der rechten Seite:

$$\mathfrak{V}_0 \mathfrak{P}_T t = 2\varrho \int_{F_0} \varphi (\mathfrak{v} + \mathfrak{V}_0)\, d\mathfrak{f} \quad \ldots \quad (73).$$

Da $\mathfrak{v}$ und φ durch Gl. (64) und Gl. (69) in Abhängigkeit von der Form der freien Oberfläche bekannt sind, ist durch Gl. (73) die in $\mathfrak{V}_0$-Richtung fallende Komponente der Stoßkraft $\mathfrak{P}_T$ durch die Form der Oberfläche bestimmt.

Iteration. Mit Hilfe von Gl. (64) kann man die Form der freien Oberfläche beim Stoßvorgang dadurch bestimmen, daß man eine geschätzte Form durch Iteration verbessert. Man kann z. B. so vorgehen: Man schätzt die Form der freien Oberfläche $\eta = \eta(x)$ und bestimmt nach der Gleichung

$$t\, v_x = x - s \frac{d x}{d s} \quad \ldots \quad (74),$$

die aus Gl. (64) durch Multiplikation mit $\mathfrak{e}_x$ (vgl. Abb. 28) entsteht, die Geschwindigkeit v_x an der freien Oberfläche. Daraus und aus der Grenzbedingung am Boden bestimmt man mit Hilfe des Greenschen Satzes[40]) an allen Stellen der freien Oberfläche die der quellen-

38) vgl. Verf. l. c. § 6.
39) Lamb, l. c. S. 51.
40) Eine ähnliche Rechnung ist in ZAMM 1925, Heft 1, ausgeführt worden: Lauk, „Der Überfall über ein Wehr".

und drehungsfreien Strömung entsprechende Geschwindigkeit v_y und verwendet dieses v_y zur Berechnung neuer

$$\eta = s\,t \int_s^\infty \frac{v_y}{s^2}\,d s \quad \text{. . . . .} \quad (75)$$

(vgl. Gl. (70)). Mit dieser neuen Form der Oberfläche kann man das Verfahren wiederholen: neue v_x nach Gl. (74), neue v_y mit Hilfe des Greenschen Satzes, neue η nach Gl. (75).

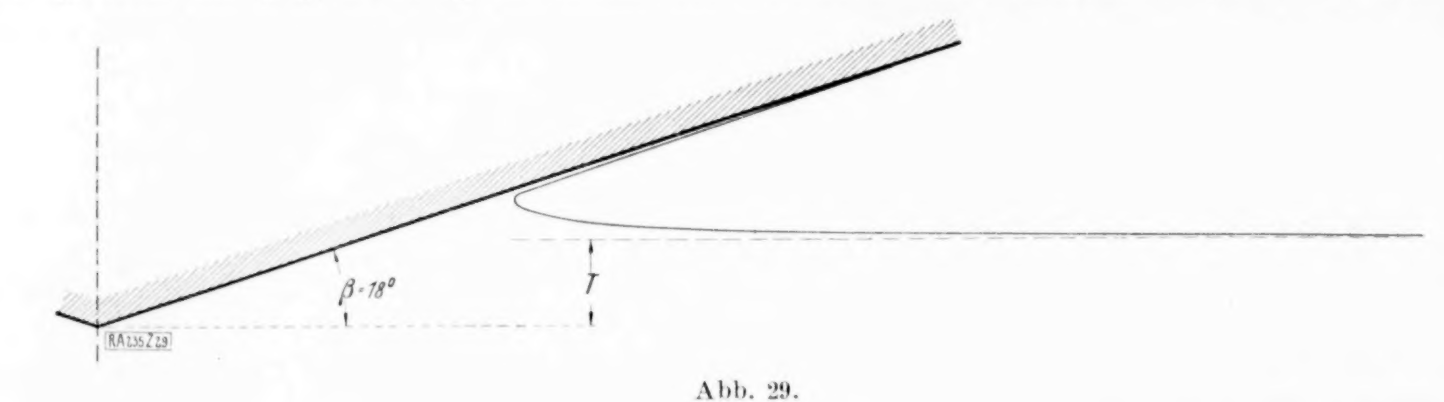


Abb. 29.

Ich habe dieses Verfahren (nach erheblicher Änderung, um es den speziellen Bedingungen unseres Beispiels anzupassen) zur Berechnung der Oberfläche beim Aufschlag eines symmetrischen Bodens mit $\beta = 18^\circ$ Kielungswinkel verwendet[41]) (Abb. 29). Daraus und mit Gl. (73) ergibt sich die Stoßkraft

$$P = 49{,}8\,T\,\varrho\,V_0^2 \quad \text{. . . . .} \quad (76).$$

Im Gegensatz zu § 14 ist die Stoßkraft P auf die Eintauchtiefe T (Abb. 29) bezogen, da die Breite der Eintauchfläche bei endlichem Kielungswinkel keine definierte Größe ist.

Wir wollen für konstante Eintauchgeschwindigkeit V_0 die Abhängigkeit der Stoßkraft P für den ganzen Bereich der Kielungswinkel β von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ abschätzen. Dazu wollen wir Gl. (43a) $\left(\mu = 1,\ \frac{2\,c}{\pi}\,\beta = T\right)$ durch Einführung eines Wertes K verallgemeinern:

$$P = K\,\frac{\pi^3}{4}\,\varrho\,V_0^2\,\frac{T}{\beta^2} \quad \text{. . . . .} \quad (77).$$

Für $\beta \to 0$ gilt Gl. (43a), also $K = 1$. Für $\beta = 18^\circ$ gibt Gl. (76) $K = 0{,}635$. Schließlich ist die Kurve des Wertes K entsprechend Gl. (83) für das Eintauchen einer Schneide in Abb. 30 eingetragen. Als Näherungsangabe könnte die eingezeichnete Parabel $K = \left(1 - \frac{2\,\beta}{\pi}\right)^2$, also mit Gl. (77)

$$P = 2\,\pi\left(\frac{\pi}{2\,\beta} - 1\right)^2 \varrho\,V_0^2\,T \quad \text{. . . . .} \quad (78)$$

dienen.

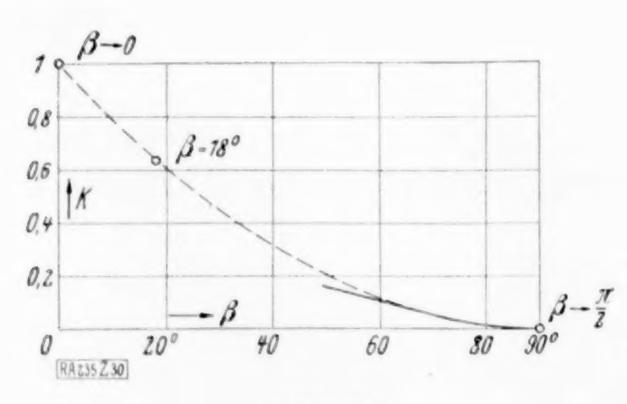


Abb. 30.

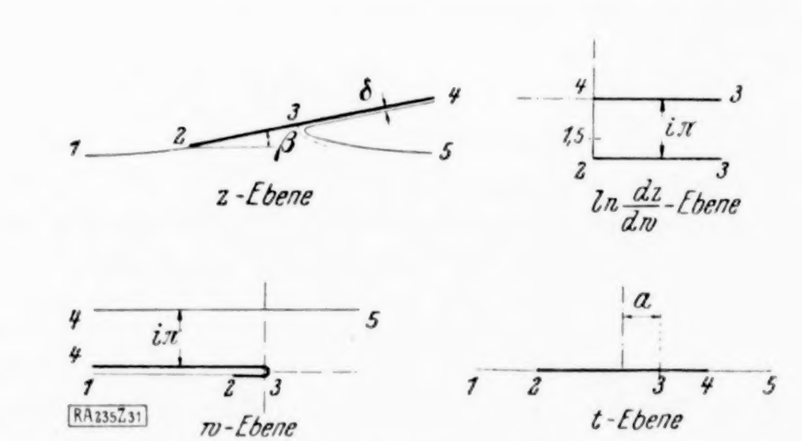


Abb. 31.

17. Stationäres Gleiten. Ebenes Problem. Für das ebene Problem des stationären Gleitens einer ebenen Platte (vgl. Abb. 31) gilt nach der Methode von Schwarz-Christoffel[42])

$$\frac{d\,w}{d\,t} = A\,\frac{t - a}{t - 1} \qquad \frac{d}{d\,t}\left(\ln - \frac{d\,z}{d\,w}\right) = \frac{i}{\sqrt{t^2 - 1}\,(t - a)}$$

[41]) Ich bin Herrn A. W. Quick, Danzig, für die verständnisvolle Hilfe bei der Durchführung der zahlenmäßigen Rechnung sehr zu Dank verpflichtet. Ferner danke ich dem Lehrstuhl Professor Pohlhausen, Techn. Hochsch. Danzig, für das Leihen einer Rechenmaschine.

[42]) In „Besant und Ramsay, Hydrodynamiks, II. Bd." wird auf S. 142 ein mathematisch ähnliches Beispiel durchgerechnet.

folglich

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dw}\,\frac{dw}{dt} = \frac{a\,t - 1 \pm i\sqrt{1-a^2}\sqrt{t^2-1}}{t-a}\cdot A\,\frac{t-a}{t-1} \quad \text{. . . . . (79)}$$

$$\frac{z}{A} = a\,(1+t) - (1-a)\ln\frac{1-t}{2} \begin{smallmatrix}-\\ \\+\end{smallmatrix} \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-t^2} \begin{smallmatrix}-\\+\\+\end{smallmatrix} i\sqrt{1-a^2}\ln\left(-t-\sqrt{t^2-1}\right) \quad . \quad (80).$$

An der Kontur gilt längs $\widehat{12}$, $\overline{24}$, $\widehat{45}$ bzw. das obere, mittlere, untere Vorzeichen. Für Logarithmen ist der Hauptwert einzusetzen. Dabei ist längs $\widehat{45}$ zu beachten, daß $\widehat{45}$ einen Bereich mit positivem Imaginärteil umgrenzt. Es ist $a = \cos\beta$. Die Konstante A läßt sich z. B. durch die Spritzerdicke δ darstellen: $\delta = \pi\,(1-a)\,A$. Die gleitende Platte liegt (logarithmisch) unendlich hoch über dem Flüssigkeitsspiegel im Unendlichen.

Aus der leicht zu berechnenden Druckverteilung erhält man durch Integration die Gleitkraft P (V = Gleitgeschwindigkeit)

$$P = A\,\pi\,\varrho\,V^2\sin\beta = \varrho\,\delta\,V^2\cot\frac{\beta}{2} \quad \text{. . . . . (81).}$$

Im Grenzfall $\beta \to 0$ besteht in jeder Hinsicht Übereinstimmung mit Abschnitt II.

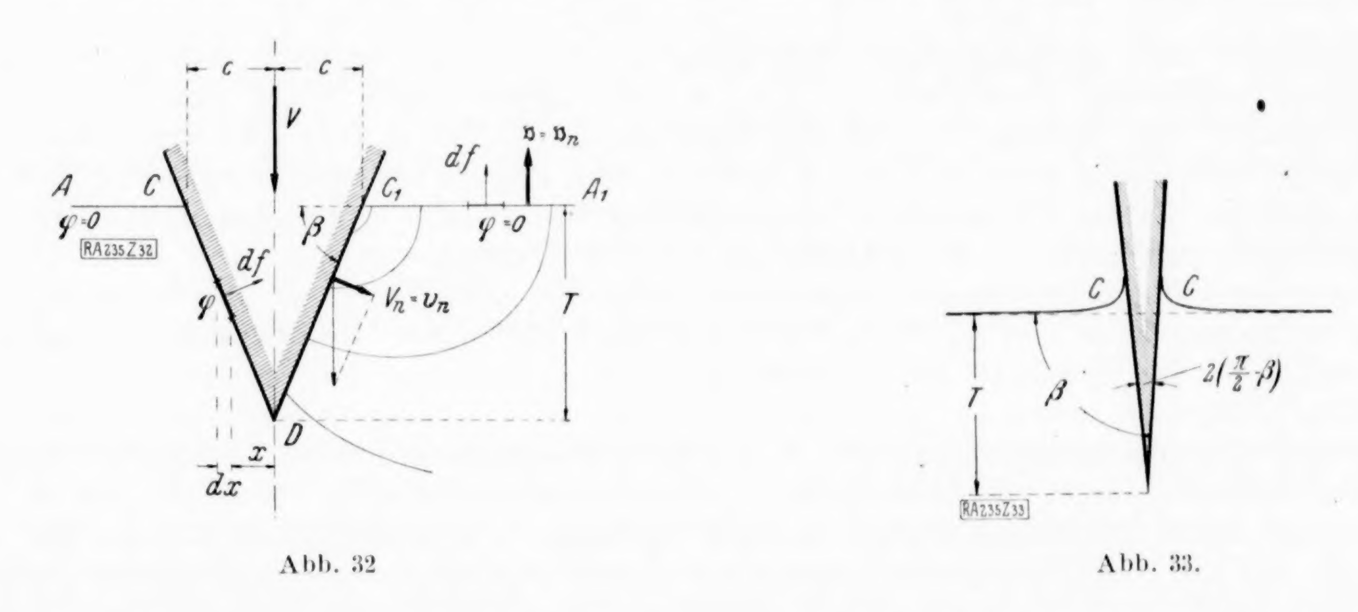


Abb. 32 Abb. 33.

18. Eintauchen einer Schneide. Ein ebenes Geschwindigkeitsfeld Abb. 32 besitze $v_t = 0$ (also auch $\varphi = 0$) längs $A\,C$ und $A_1\,C_1$ und $v_n = V\cos\beta$ = konst. längs $C\,D\,C_1$. Seine Berechnung bietet keine Schwierigkeit. Insbesondere ist die „Bewegungsgröße"

$$B = \varrho\left|\int_F \varphi\,d\mathfrak{f}\right| = \varrho\int_{-C}^{+C}\varphi\,dx = \varrho\,V\,T^2\cot\beta\left\{\frac{\pi-2\beta}{\sin 2\beta}\cdot\frac{\pi}{\left[\Gamma\left(1-\frac{\beta}{\pi}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\beta}{\pi}\right)\right]^2} - 1\right\} \quad . \ . \ . \quad (82).$$

Der Vektor $d\mathfrak{f}$ ist ein Element der Fläche F, die in Abb. 32 als Kontur $A\,C\,D\,C_1\,A_1$ erscheint. Γ ist das Funktionszeichen der Gammafunktion.

Wir betrachten nun das Eintauchen einer scharfen Schneide $2\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) \to 0$ (Abb. 33). Es läßt sich zeigen, daß mit Ausnahme unendlich kleiner, bedeutungsloser Bereiche um C die freie Oberfläche unendlich flach geneigt ist und folglich das Geschwindigkeitsfeld Abb. 32 herrscht. Für das Eintauchen mit konstanter Geschwindigkeit V_0 gilt wie in § 16 (Stoßkraft) $\frac{DB}{Dt} = \frac{2}{t}\,B$. Mit $V_0\,t = T$ und mit R für den Klammerwert der Gl. (82) $\left[\text{für } \beta \to \frac{\pi}{2} \text{ wird } R = 0{,}89\ldots\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)^2\right]$

$$P = \frac{DB}{Dt} = 2\,\varrho\,V_0^2\,T\cot\beta\cdot R = 1{,}78\,\varrho\,V_0^2\,T\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)^2 \quad \text{. . . . . . . (83).}$$

Auch das Eintauchen einer Schneide mit veränderlichem Schneidenwinkel läßt sich mit Hilfe von Superposition aus obigem Ergebnis ableiten. Ferner läßt sich wie in § 14 der Aufschlag einer Schneide mit gegebener Masse berechnen.

Über die Ansätze der Mechanik isotroper Kontinua.

Von *K. Hohenemser* und *W. Prager* in Göttingen.

1. Einleitung. Die Aufgabe der Kontinuumsmechanik ist, das mechanische Verhalten von Körpern aus deformierbarem Material zu beschreiben, das heißt den Zusammenhang zwischen äußeren Kräften und isothermen Formänderungen eines beliebig gestalteten und belasteten Körpers solcher Art vorauszusagen. Man beschränkt sich dabei auf gewisse Idealstoffe, die so gewählt sind, daß ihr Verhalten mit demjenigen der natürlichen Stoffe angenähert übereinstimmt. Die bekanntesten dieser Idealstoffe sind der isotrope elastische Körper und die zähe Flüssigkeit; beide werden durch drei Materialkonstanten gekennzeichnet, der elastische Körper durch Dichte, Kompressionsmodul und Gleitmodul, die zähe Flüssigkeit durch Dichte, Kompressionsmodul und Zähigkeitskoeffizient. Metalle verhalten sich, soweit sie quasiisotrope Struktur aufweisen, angenähert wie elastische Körper, wenn man sich auf genügend kleine Deformationen und genügend kleine Beobachtungszeiten beschränkt. Flüssigkeiten verhalten sich wie die zähe Flüssigkeit, wenn die Geschwindigkeiten der Bewegung genügend klein sind. Durch die rasche Entwicklung des Materialprüfungswesens ist jedoch mehr und mehr das Bedürfnis nach anderen Ansätzen entstanden, die das Verhalten der natürlichen isotropen und quasiisotropen Stoffe auch bei größeren Deformationen und Geschwindigkeiten sowie bei längeren Beobachtungszeiten beschreiben können.

2. Geordnete und quasigeordnete Bewegungen. Die Wahl solcher neuer Idealstoffe begegnet einer typischen Schwierigkeit: Die Kontinuumsmechanik setzt eine „geordnete" Bewegung voraus, die Schicksale, welche benachbarte Teilchen im Lauf der Bewegung erfahren, sollen nur wenig voneinander verschieden sein. Die „Teilchen" sind dabei so groß zu denken, daß sie bereits die gleichen Eigenschaften haben wie das ganze Kontinuum. In einem quasiisotropen Metall z. B. müßten die Teilchen mindestens so groß sein, daß die Quasiisotropie auch für jedes einzelne angenähert erfüllt ist. Die Voraussetzung der geordneten Bewegung trifft nun aber bei größeren Deformationen der festen Körper und bei höheren Geschwindigkeiten der flüssigen Stoffe nicht mehr zu, und zwar gibt es eine mehr oder weniger scharfe Grenze, oberhalb deren die geordnete in eine ungeordnete Bewegung übergeht, bei welcher unmittelbar benachbarte Teilchen durchaus verschiedene Schicksale erleiden. Im Fall der Metalle ist es die sogenannte „Fließgrenze", oberhalb deren in großer Zahl Gleitflächen in allen möglichen Orientierungen auftreten. Die Bewegung erfolgt so, daß Teilchen, die auf gegenüberliegenden Ufern einer Gleitfläche liegen, also unmittelbar benachbart sind, sich im Lauf der Bewegung weit voneinander entfernen. Im Fall der Flüssigkeiten ist es die Turbulenzgrenze, oberhalb deren eine ungeordnete Bewegung entsteht.

Die nächstliegende Art, solche ungeordneten Bewegungen der mathematischen Behandlung zugänglich zu machen, ist zweifellos die statistische Methode. Das heißt man wählt einen bestimmten Typ der Unordnung, in der Misesschen Bezeichnungsweise ein Kollektiv mit bestimmten Merkmalen in einer gewissen Verteilung, als grundlegend für die Bewegung und versucht hieraus alle Erscheinungen der betreffenden ungeordneten Bewegung abzuleiten. Solche Versuche liegen bisher nur für die Turbulenzerscheinungen vor[1]).

Wenn auch die statistische Behandlung erkenntnistheoretisch am befriedigendsten erscheint, so ist ihre konsequente Durchführung heute noch mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden, da die allgemeinen Methoden zur statistischen Behandlung eines Aufgabenkreises noch wenig entwickelt sind, obwohl die mathematische Statistik in zahlreichen Einzelgebieten mit großem Erfolg angewendet wurde[2]). Es ist daher vielfach auch für die ungeordnete Bewegung der turbulenten Strömung die „Kontinuumsmethode" angewendet worden. Diese legt zwar einen Idealstoff zugrunde, der entsprechend den Voraussetzungen der Kontinuumstheorie nur geordnete Bewegungen ausführen kann, der sich aber den Erscheinungen bei einer ungeordneten Bewegung zuordnen läßt, wenn man lediglich gewisse zeitliche und räumliche Mittelwerte der Geschwindigkeiten, der Verformungen und der Spannungen betrachtet. Wir müssen allerdings bemerken, daß die Voraussetzung der Existenz solcher Mittelwerte in einem Raum-Zeitpunkt implizite bereits typisch statistische Annahmen über die Art der Unordnung enthält, denn diese Voraussetzung besagt, daß die Mittelwerte im wesentlichen unabhängig sind von der Größe des Volum- oder Zeitelementes, über welches gemittelt wird, solange dieses Element nicht zu groß und nicht zu klein angenommen wird. Hier ist eine ganz bestimmte Voraussetzung über die Art der Unordnung gemacht, die durchaus nicht für

[1]) J. M. Burgers, Proc. Amsterdam 32 (1929). S. 414, S. 643, S. 818. — Th. v. Kármán, Gött. Nachr. math. phys. Kl. 1930, S. 58.

[2]) Hinweise auf einige allgemeine Grundregeln für statistische Ansätze findet man bei K. Hohenemser, Naturwissenschaften 19, (1931), 833.

jede Bewegung zuzutreffen braucht. Wir wollen eine Bewegung, die sich auf diese Weise beschreiben läßt, quasigeordnet nennen. Kennt man die Theorie der geordneten Bewegung eines Stoffes, dann braucht man in der Kontinuumstheorie der quasigeordneten Bewegung lediglich alle Größen, die linear vorkommen, durch ihre Mittelwerte zu ersetzen, während den Größen, die in Produkten oder höheren Potenzen vorkommen, außerdem noch „Schwankungsglieder" hinzuzufügen sind. Wir stellen uns im folgenden auf den Standpunkt der Kontinuumsmechanik und betrachten Idealstoffe, welche lediglich geordnete oder quasigeordnete Bewegungen ausführen. Eine Übersicht über die bisher vorgeschlagenen Erweiterungen der klassischen Kontinuumsmechanik gab kürzlich R. von Mises[3]). Wir wollen eine Systematik der einfachsten Idealstoffe aufstellen, welche alle bisher vorgeschlagenen und darüber hinaus einige neue Idealstoffe enthält.

3. Die allgemeinen Bewegungsgleichungen der Kontinuumsmechanik. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{u}$ den Vektor der Verschiebung, mit $\mathfrak{w} = \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t}$ den Vektor der Verschiebegeschwindigkeit, mit ϱ die Masse je Volumeneinheit, mit Σ den Spannungstensor, der auf die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z bezogen die Matrix

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

hat. Auf die Volumeneinheit sollen bekannte äußere Kräfte wirken, die ein Potential Ω haben. Dann gelten ganz allgemein in jedem Kontinuum die Bewegungsgleichungen, welche wir in der Eulerschen Form unter Benutzung der Gibbsschen Vektorsymbolik schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\varrho\, \mathfrak{w}] = \nabla \cdot \{\Sigma - \varrho\, \mathfrak{w}\mathfrak{w}\} + \nabla \Omega \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

Bei der Ableitung dieser Gleichung ist bereits die Kontinuitätsbedingung

$$\dot{\varrho} + \nabla \cdot \varrho\, \mathfrak{w} = 0$$

verwendet worden. Wir bemerken, daß die Gl. (1) die Voraussetzung einer geordneten Bewegung enthält, im übrigen aber noch nichts über spezielle Eigenschaften der Idealstoffe aussagt.

Die Bewegungsgleichung der quasigeordneten Bewegung heißt, wenn man konstante Dichte ϱ annimmt:

$$\varrho \frac{\partial \overline{\mathfrak{w}}}{\partial t} = \nabla \cdot \{\overline{\Sigma} - \varrho\, \overline{\mathfrak{w}}\,\overline{\mathfrak{w}} - \varrho\, \overline{\mathfrak{w}'\mathfrak{w}'}\} + \nabla \Omega .$$

Die überstrichenen Größen sind hierin Mittelwerte, die $\mathfrak{w}'$ sind die Abweichungen der wirklichen Geschwindigkeiten von den mittleren Geschwindigkeiten. Alle in Gl. (1) vorkommenden Größen sind einfach durch ihre Mittelwerte ersetzt worden, lediglich dem quadratischen Glied $\overline{\mathfrak{w}}\,\overline{\mathfrak{w}}$ muß noch das Schwankungsglied $\overline{\mathfrak{w}'\mathfrak{w}'}$ hinzugefügt werden. Wie schon bemerkt, setzt die Forderung, daß in jedem Raum-Zeitpunkt solche Mittelwerte existieren, einen speziellen Typ der Unordnung, eben den quasigeordneten voraus.

Die Gl. (1), welche man die Grundgleichung der Kontinuumsmechanik nennen kann, da sie für die geordnete Bewegung eines jeden Kontinuums gilt, genügt nicht zur Berechnung von $\mathfrak{u}$ aus den Anfangs- und Randbedingungen, vielmehr muß zu diesem Zweck das Glied $\nabla \cdot \Sigma$ durch einen Ausdruck in den $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{w}$ ersetzt werden. Die verschiedenen Idealstoffe sind also durch verschiedenartige Zusammenhänge zwischen dem Feld des Verschiebungsvektors und dem Spannungstensor Σ gekennzeichnet.

4. Weitere allgemeine Voraussetzungen in der Theorie der Idealstoffe. Durch Abspalten der Translation und Rotation erhält man in bekannter Weise aus dem Verschiebungsfeld $\mathfrak{u}$ den Deformationstensor E mit der symmetrischen Matrix

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{vmatrix} .$$

[3]) R. von Mises, Verh. 3 int. K. tech. Mech. Stockholm 1931, Bd. 2 S. 3.

Bei hinreichend kleinen Verformungen gehen die Größen $\varepsilon_x \ldots \gamma_{xy} \ldots$ in die aus der Elastizitätstheorie bekannten Dehnungen und Schiebungen über. Bildet man in gleicher Weise aus dem Feld der Verschiebegeschwindigkeit 𝔴 den Tensor der Deformationsgeschwindigkeit $\dot{E}$, so sind die Glieder $\dot{\varepsilon}_x \ldots \dot{\gamma}_{xy} \ldots$ der Matrix identisch mit den Dehnungs- und Schiebungsgeschwindigkeiten, da sie kleine Deformationsgrößen bedeuten, die in einem kleinen Zeitintervall aufgebracht werden. Wir nehmen allgemein an, daß die Drehungsanteile der Felder 𝔲 und 𝔴 keine inneren Spannungen im Kontinuum wecken und haben nur noch Zusammenhänge zwischen den Tensoren Σ und E bzw. deren zeitlichen Ableitungen zu betrachten. Wir zerlegen weiter E in eine Volumdehnung und in eine volumentreue Deformation und machen für alle Stoffe die gemeinsame Annahme, daß die mittlere Dehnung $\varepsilon = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3}$ lediglich von der mittleren Zugspannung

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

in linearer Weise abhängt:

$$\sigma = K\,\varepsilon \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

K ist der Kompressionsmodul. Für genügend kleine mittlere Dehnungen wird diese Beziehung (Zustandsgleichung) immer erfüllt sein. Tatsächlich bleibt bei festen und flüssigen Körpern $|\varepsilon|$ auch bei sehr hohen Drucken klein, und die lineare Beziehung 2 gilt genügend genau, solange man nicht allzu hohe Drucke aufbringt.

Den volumtreuen (deviatorischen) Anteil von E nennen wir E_0, den entsprechenden deviatorischen Anteil von Σ bezeichnen wir mit Σ_0. Wir haben jetzt nur noch Zusammenhänge zwischen den Deviatoren Σ_0 und E_0 mit den Matrizen

$$\left|\begin{matrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{matrix}\right| \quad \text{und} \quad \left|\begin{matrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{matrix}\right|$$

bzw. deren zeitlichen Ableitungen zu betrachten. Wir nehmen wieder in Übereinstimmung mit der bisherigen Erfahrung an, daß dieser Zusammenhang von der mittleren Zugspannung weitgehend unabhängig ist.

Zwei nacheinander aufgebrachte Spannungszustände lassen sich zusammensetzen zu einem resultierenden Spannungszustand, dessen Komponenten sich als Summe der entsprechenden Komponenten der Teilspannungszustände ergeben. Zwei reine Deformationen jedoch ergeben zusammengesetzt nur dann wieder eine reine Deformation (symmetrische Matrix), wenn die Verformungen klein sind. Wir wollen uns im folgenden auf so kleine Verformungen beschränken, daß diese Art der Zusammensetzung angenähert zulässig ist, da die mathematische Behandlung dadurch wesentlich vereinfacht wird. H. Hencky[4]) hat eine Theorie endlicher Verformungen angegeben, doch enthalten seine Annahmen soviel Willkür und erschweren überdies jegliche Berechnung dermaßen, daß es vorteilhafter erscheint, die Beschränkung auf kleine Formänderungen grundsätzlich aufrechtzuerhalten. Gegenüber den Deformationen, welche die Elastizitätstheorie höchstens zulassen darf, damit sich die Stoffe angenähert ideal elastisch verhalten, sollen die von uns zugelassenen groß sein. Wir glauben im übrigen, daß diese Beschränkung den meisten Anwendungen auf dem Gebiet des Materialprüfungswesens nicht entgegensteht. In dem besonderen Fall, daß die Verschiebegeschwindigkeit 𝔴 berechnet werden kann, ohne auf die Verschiebung 𝔲 einzugehen, z. B. bei der Strömung einer zähen Flüssigkeit, wird die obige Voraussetzung überflüssig, denn zwei Formänderungsgeschwindigkeitszustände ergeben zusammengesetzt wieder einen symmetrischen Tensor.

5. Die Form des tensoriellen Zusammenhangs zwischen Spannungen und Verformungen. Wir wollen jetzt eine weitere allgemeine Voraussetzung machen, die soweit bisher bekannt

[4]) H. Hencky, ZS tech. Phys. 9 (1928) S. 215 und Ann. d. Phys. 5 Bd. 2 (1929) S. 617.

für alle isotropen Stoffe zutrifft. Einer reinen einachsigen Schiebung soll nämlich auch eine reine Schubspannung mit gleicher Achsenrichtung entsprechen, das heißt einem Spannungstensor

$$T = \begin{vmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

soll ein Deformationstensor von der Form

$$\Gamma = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\gamma}{2} & 0 \\ \frac{\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

zugeordnet sein. Aus dieser Voraussetzung lassen sich wichtige Folgerungen über die Form der für die einzelnen Idealstoffe kennzeichnenden Verknüpfungen zwischen den Deviatoren Σ_0 und E_0 ziehen. Zwischen einer reinen Schiebung und der dazugehörigen Schubspannung möge irgendein für den Stoff kennzeichnender Zusammenhang

$$\tau = f\left(\frac{\gamma}{2}\right) \qquad (3)$$

bestehen. Jede kleine volumtreue Deformation läßt sich nun aus 5 reinen Schiebungen $\Gamma_i, (i = 1, 2 \ldots 5)$, deren Achsen hinreichend allgemeine Lage haben, zusammensetzen:

$$E_0 = \sum_{i=1}^{5} \Gamma_i \qquad (4).$$

Ebenso gilt für die entsprechenden Spannungsdeviatoren:

$$\Sigma_0 = \sum_{i=1}^{5} T_i = \sum_{i=1}^{5} f(\Gamma_i) \qquad (5).$$

Gl. (5) muß für alle Γ_i bestehen, welche der Gl. (4) genügen und muß überdies für $\Sigma_0 = T$ in zwei Gleichungen, die mit Gl. (3) indentisch sind, übergehen. Man erkennt, daß dies bei beliebiger Funktion f nur dann der Fall ist, wenn

$$\Sigma_0 = \frac{f(H)}{H} \sum_{i=1}^{5} \Gamma_i = \frac{f(H)}{H} E_0,$$

wo H eine skalare Invariante des Deviators E_0 ist, die für den Fall der reinen Schiebung $E_0 = \Gamma$, mit $\frac{\gamma}{2}$ indentisch wird.

Da die erste Invariante eines Deviators Null ist, kommen für H nur noch Funktionen der zweiten und dritten Invarianten $E_{0\,II}$ und $E_{0\,III}$ in Frage. Es hat sich gezeigt, daß das plastische Verhalten der Metalle weitgehend von der zweiten Invarianten des Spannungsdeviators (Misessche Fließbedingung) beherrscht wird. Wir wollen weiterhin voraussetzen, daß die dritte Invariante ganz allgemein keinen Einfluß auf das Verhalten unserer Idealstoffe hat. Die einzige Funktion von $E_{0\,II}$, die für $E_0 = \Gamma$ in $\frac{\gamma}{2}$ übergeht, ist

$$\sqrt{-E_{0\,II}},$$

oder in den Hauptwerten von E_0 ausgedrückt[5]):

$$\sqrt{-E_{0\,II}} = \sqrt{-(\varepsilon_{01}\varepsilon_{02} + \varepsilon_{02}\varepsilon_{03} + \varepsilon_{03}\varepsilon_{01})}.$$

---

[5]) Eine naheliegende Invariante, welche für H gesetzt werden könnte, die allerdings noch $E_{0\,III}$ enthält, ist

$$H = \frac{\gamma_{max}}{2} = \left|\frac{\varepsilon_{0i} - \varepsilon_{0k}}{2}\right|_{max},$$

das Rechnen mit γ_{max} ist unbequem, außerdem sind die numerischen Werte von $\frac{\gamma_{max}}{2}$ und von $\sqrt{-E_{0\,II}}$ in keinem Fall sehr voneinander verschieden. Es empfiehlt sich daher, die zweite Invariante zu verwenden, auch wenn man aus physikalischen Gründen $\frac{\gamma_{max}}{2}$ vorziehen würde.

Wir haben unter den erwähnten Voraussetzungen folgende Regel, um aus einem reinen Schiebungsversuch den tensoriellen Zusammenhang zu gewinnen: Entspricht einer reinen Schiebung Γ eine reine Schubspannung T mit gleicher Achsenrichtung, und besteht zwischen den Komponenten von Γ und T die Beziehung

$$\tau = f\left(\frac{\gamma}{2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6),$$

dann gilt für jede volumtreue Deformation

$$\Sigma_0 = f\left(\sqrt{E_0'{}_{II}}\right)\frac{E_0}{\sqrt{E_0'{}_{II}}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7),$$

wo $-E_{0\,II} = E_0'{}_{II}$ gesetzt ist.

Haben wir für Gl. (6) die Beziehung

$$\tau = c + a\frac{\gamma}{2}$$

mit zwei Konstanten c und a, dann heißt die entsprechende Deviatorgleichung:

$$\Sigma_0 = \left(c + a\sqrt{E_0'{}_{II}}\right)\frac{E_0}{\sqrt{E_0'{}_{II}}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8),$$

man kann auch von

$$\tau - c = a\frac{\gamma}{2}$$

ausgehen und erhält dann:

$$\frac{\Sigma_0}{\sqrt{\Sigma_0'{}_{II}}}\left(\sqrt{\Sigma_0'{}_{II}} - c\right) = a\,E_0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9).$$

Aus

$$\Sigma_0 = k\,E_0$$

folgt

$$\sqrt{\Sigma_0'{}_{II}} = k\sqrt{E_0'{}_{II}}$$

und durch Einsetzen von k:

$$\frac{\Sigma_0}{\sqrt{\Sigma_0'{}_{II}}} = \frac{E_0}{\sqrt{E_0'{}_{II}}}.$$

Mit Hilfe dieser Beziehung erkennt man sofort, daß die Gl. (8) und (9) indentisch sind.

Hat man für die reine Schiebung eine Differentialgleichung, etwa

$$\tau = c + a\frac{\gamma}{2} + \mu\frac{\dot{\gamma}}{2},$$

dann ergeben sich verschiedene Möglichkeiten der Verallgemeinerung auf volumtreue Deformationen E_0, je nachdem, ob man τ auffaßt als Funktion von γ oder von $\dot{\gamma}$ oder von beiden. Im letzten Fall erhält man:

$$\Sigma_0 = \left(c + a\sqrt{E_0'{}_{II}}\right)\frac{E_0}{\sqrt{E_0'{}_{II}}} + \mu\,\dot{E}_0.$$

Faßt man dagegen τ auf als Funktion von $\dot{\gamma}$, wobei γ nur als Parameter erscheint, dann ergibt sich

$$\Sigma_0 = \left(c + a\sqrt{E_0'{}_{II}} + \mu\sqrt{\dot{E}_0'{}_{II}}\right)\frac{\dot{E}_0}{\sqrt{\dot{E}_0'{}_{II}}}.$$

Der Schubversuch allein genügt also in diesem Fall nicht, um den Zusammenhang zwischen Σ_0 und E_0 eindeutig zu erhalten. Immerhin ist es bemerkenswert, daß unter der gemachten Voraussetzung nur noch eine sehr begrenzte Zahl von Möglichkeiten für die Verknüpfung zwischen Σ_0 und E_0 übrigbleibt, nachdem die Gesetzmäßigkeit für den Fall des reinen Schubes ermittelt worden ist.

6. Systematik der einfachsten Idealstoffe. Ehe wir dazu übergehen, spezielle Idealstoffe zu diskutieren, fassen wir noch einmal alle Voraussetzungen, die wir über deren gemeinsame Eigenschaften gemacht haben, zusammen: Die Stoffe sind isotrop oder quasiisotrop, die Bewegung ist geordnet oder quasigeordnet, durch den Drehungsanteil des Verschiebungsfeldes bzw. des Feldes der Verschiebegeschwindigkeiten werden keine inneren Spannungen geweckt, die Volumänderung hängt allein von dem allseitigen Druck ab, und zwar in linearer Weise, überall wo der Tensor E verwendet wird, nehmen wir die Verformungen als klein an. Die Beziehung zwischen dem volumtreuen Anteil der Deformation E_0 und dem deviatorischen Anteil der Spannungen Σ_0 ist vom allseitigen Druck unabhängig. Einer reinen Schiebung entspricht eine reine Schubspannung mit gleicher Achsenrichtung, die dritte Invariante des Spannungs- oder Deformationsdeviators ist einflußlos.

Wenn die Gesetze der reinen Schiebung gefunden sind, ist ein Stoff, bei welchem die obigen Voraussetzungen zutreffen, innerhalb gewisser Grenzen vollkommen gekennzeichnet, bzw. es sind lediglich noch Stichproben mit mehrachsigen Spannungszuständen zu machen, um über das Zutreffen einer aus einer begrenzten Zahl von Möglichkeiten zu entscheiden. Wir betrachten daher zunächst lediglich reine Schiebungen, und zwar wollen wir 8 Idealstoffe diskutieren, die sich alle als Sonderfälle der Beziehung

$$\tau + c_1 \dot{\tau} + c_2 \gamma + c_3 \dot{\gamma} + c_4 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

ergeben, die also durch höchstens vier Konstanten gekennzeichnet werden. Wir ordnen die Stoffe in vier Gruppen an:

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad \ldots \quad (1) \qquad\qquad \tau = \mu \dot{\gamma} - \frac{\mu}{\beta} \dot{\tau} \quad \ldots \quad (5)$$

$$\tau - \tau_0 = \mu \dot{\gamma} \quad \ldots \quad (2) \qquad\qquad \tau - \tau_0 = \mu \dot{\gamma} - \frac{\mu}{\beta} \dot{\tau} \quad \ldots \quad (6)$$

$$\tau - a \gamma = \nu \dot{\gamma} \quad \ldots \quad (3) \qquad\qquad \tau - a \gamma = \nu \dot{\gamma} - \frac{\nu}{\beta} \dot{\tau} \quad \ldots \quad (7)$$

$$\tau - \tau_0 - a \gamma = \nu \dot{\gamma} \quad \ldots \quad (4) \qquad\qquad \tau - \tau_0 - a \gamma = \nu \dot{\gamma} - \frac{\nu}{\beta} \dot{\tau} \quad \ldots \quad (8).$$

Der Stoff (8) ist der allgemeinste und wird gekennzeichnet durch die 4 Konstanten τ_0, a, ν, β. Außer diesen Gleichungen gelten für jeden Stoff noch die Gl. (1) und (2), welche als Stoffkonstanten die Dichte ϱ und den Kompressionsmodul K enthalten. Für die quasigeordnete Bewegung sind in den Gl. (1) bis (8) lediglich die überstrichenen Mittelwerte einzuführen, da Produkte und Potenzen von Spannungen und Schiebungen nicht vorkommen.

7. Die „flüssigen" Idealstoffe. Wir betrachten zunächst die Stoffe (1) und (5). Stoff (1) ist die zähe Flüssigkeit, μ der Zähigkeitskoeffizient. Nimmt man plötzlich aus dem spannungslosen Ruhezustand eine Schiebung mit der Geschwindigkeit $\dot{\gamma} = c$ vor, dann entsteht sofort die Zähigkeitsspannung

$$\tau = \mu c .$$

Geht $\dot{\gamma}$ plötzlich auf Null, dann verschwindet im selben Augenblick auch τ.

Der Stoff (5) wurde von Maxwell vorgeschlagen[6]), er unterscheidet sich von der zähen Flüssigkeit (1) nur dadurch, daß bei einer plötzlich aus dem spannungslosen Zustand vorgenommenen Schiebung mit der Geschwindigkeit $\dot{\gamma} = c$ die Zähigkeitsspannung erst allmählich auf ihren asymptotisch erreichten Endwert $\tau = \mu c$ ansteigt entsprechend der Gleichung:

$$\tau = \mu c \left(1 - e^{-\frac{\beta}{\mu} t}\right).$$

Geht man vom Endzustand aus mit $\dot{\gamma}$ plötzlich auf Null, dann verschwindet die Schubspannung τ erst allmählich entsprechend der Beziehung

$$\tau = \mu c \, e^{-\frac{\beta}{\mu} t} .$$

Man nennt $\frac{\mu}{\beta}$ auch die Relaxationszeit, das ist diejenige Zeit, in welcher nach Aufhören der Schiebegeschwindigkeit die Spannung auf den e^{ten} Teil abgesunken ist. Bei der Bewegung der Stoffe (1) und (5) besteht keinerlei Beschränkung in bezug auf die Größe der Verformung,

[6]) J. C. Maxwell, Scient. Pap. 2 (1890), S. 30.

da lediglich Verformungsgeschwindigkeiten in den Differentialgleichungen und entsprechend in den Randbedingungen vorkommen. Berechnet man allerdings

$$\gamma^* = \int_0^t \dot{\gamma}\, d\, t,$$

dann muß man beachten, daß γ^* im allgemeinen nicht indentisch ist mit der Schiebung γ nur für kleine Werte geht γ^* in γ über. Die Konstante β hat folgende Bedeutung: Nimmt man aus dem spannungslosen Ruhezustand eine Schiebung mit der Geschwindigkeit $\dot{\gamma}$ vor, dann ist

$$\lim_{t \to 0} \tau = \beta\, \gamma^* = \beta\, \gamma.$$

β ist also der Gleitmodul für den Anfang der Bewegung. Bei sehr schnellen Bewegungen um den spannungslosen Zustand herum verhält sich der Stoff (5) wie der ideal elastische Körper mit dem Gleitmodul β.

Wir wollen allgemein einen Stoff eine Flüssigkeit nennen, wenn bei Anbringung einer konstanten Spannung τ oder einer konstanten Schiebegeschwindigkeit $\dot{\gamma}$ nach genügend langer Zeit sich ein endliches von Null verschiedenes $\dot{\gamma}$ bzw. τ einstellt. Das Verhältnis

$$\lim_{\substack{t \to \infty \\ \tau \to 0}} \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \mu \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

ist dann der Zähigkeitskoeffizient der Flüssigkeit. Wir haben in Gl. (11) auch den Grenzwert für verschwindendes τ genommen, da im allgemeinen der Zusammenhang zwischen τ und $\dot{\gamma}$ nicht linear ist. Im obigen Sinn ist sowohl der Stoff (1) wie (5) eine Flüssigkeit. Die wirklichen Flüssigkeiten befolgen kompliziertere Gesetzmäßigkeiten als die durch (5) dargestellte, insbesondere gibt der Stoff (5) die Erscheinung des allmählichen Rückfließens, die W. Braunbeck[7]) an Chatterton Compound beobachtete, nicht wieder. Der durch die Gleichungen des Prandtlschen Gedankenmodells[7a]) gekennzeichnete Idealstoff scheint dagegen nach Braunbeck alle Eigenschaften der wirklichen sehr zähen Flüssigkeiten qualitativ richtig zu beschreiben. Wir wollen jedoch hier nur die durch Gl. (10) gekennzeichneten einfachsten Idealstoffe betrachten und müssen daher den Prandtlschen Ansatz außer acht lassen.

Bei genügend langen Beobachtungszeiten und langsamen Verformungen verhalten sich auch die sogenannten festen Körper wie Flüssigkeiten, das heißt bei Anbringen einer Schubspannung τ stellt sich schließlich eine von Null verschiedene praktisch konstante Fließgeschwindigkeit $\dot{\gamma}$ ein, so daß man die Zähigkeitszahlen nach Gl. (11) bestimmen kann. Für reine Metalle findet man so Werte von μ in der Größenordnung von 10^{12} c. g. s. Einheiten[8]). Ältere Versuche von C. Barus an Stahl[9]) sind in diesem Zusammenhang nicht brauchbar, da die Versuche abgebrochen wurden, ehe sich die zu der aufgebrachten Last gehörende konstante Fließgeschwindigkeit einstellte.

Stoff (2) ist ein von E. C. Bingham[10]) später noch einmal von H. Hencky[11]) vorgeschlagener Idealstoff, welcher die Tatsache berücksichtigt, daß bei vielen Flüssigkeiten — inbesondere Mehrstoffsystemen — und bei Metallen ein merkliches Fließen erst oberhalb einer bestimmten Fließspannung τ_0 eintritt. Stoff (6) ist die gleiche Flüssigkeit mit Relaxation. Die Zähigkeitszahl solcher Flüssigkeiten mit Fließgrenze ist definiert durch

$$\lim_{\substack{t \to \infty \\ \tau - \tau_0 \to 0}} \frac{\tau - \tau_0}{\dot{\gamma}} = \mu\,.$$

8. Die „festen" Idealstoffe. Für den Idealstoff (3), der von W. Voigt[12]) vorgeschlagen wurde, trifft das von uns verwendete Kennzeichen einer Flüssigkeit nicht mehr zu, es handelt sich hier um einen festen Körper, denn nach Aufbringen einer Spannung τ aus dem spannungsfreien Zustand geht $\frac{\dot{\gamma}}{2}$ vom Wert $\frac{\tau}{2\nu}$ asymptotisch nach Null entsprechend der Gleichung

$$\frac{\dot{\gamma}}{2} = \frac{\tau}{2\nu} e^{-\frac{\alpha}{\nu} t}\,.$$

[7]) W. Braunbeck, ZS f. Phys. 57 (1929), S. 501. — [7a]) L. Prandtl, ZS ang. Math. u. Mech. 8 (1928), S. 85.
[8]) F. Hettwer, Wiener Ber. 134 2a (1925), S. 51.
[9]) C. Barus, Phil. Mag. 5, 29 (1890), S. 337.
[10]) E. C. Bingham, Scient. Pap. Bureau of Standards 13 (1916) S. 309 und Rheology 1 (1930), S. 507.
[11]) H. Hencky, ZS ang. Math. u. Mech. 5 (1925), S. 115.
[12]) W. Voigt, Abh. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 36 (1889) und 38 (1891).

Wenn wir nach Gl. (11) den Zähigkeitskoeffizienten bilden, bekommen wir $\mu = \infty$. Man kann den Stoff (3) auch auffassen als Flüssigkeit mit unendlich großer Zähigkeit. Bei den wirklichen Stoffen ist eine scharfe Trennung in feste Körper und Flüssigkeiten nicht möglich, denn der Fall $\mu = \infty$ tritt genau niemals ein. Man wird daher, wenn es sich um sehr lange Beobachtungszeiten handelt, auch die sogenannten festen Körper als Flüssigkeiten behandeln und ihre Zähigkeitszahlen angeben. Wenn es sich dagegen um kurze Beobachtungszeiten handelt, wird man Idealstoffe wie (3) zugrunde legen und den Gleitmodul a und die Dämpfungskonstante ν angeben.

Man hat, angefangen mit den ausführlichen Voigtschen Versuchen[13]), Ausschwingversuche an zahlreichen „festen Stoffen" gemacht und unter Zugrundelegung des Idealkörpers (3) die Konstante ν bestimmt, die sich bei reinen Metallen in der Größenordnung von 10^8 c. g. s. Einheiten ergibt[14]). Es ist nicht immer klar genug erkannt worden, daß die so erhaltenen Konstanten eines Stoffes mit dem Zähigkeitskoeffizienten desselben Stoffes, den man unter Zugrundelegung des Idealstoffes (1) bei langsamem Fließen unter einer konstanten Last erhält, nicht das geringste zu tun haben. Man faßt ein und denselben Stoff bei sehr langsamen Bewegungen als zähe Flüssigkeit mit einer kennzeichnenden Konstanten, der Zähigkeit, bei schnellen Bewegungen als Voigtschen Körper mit zwei Konstanten a und ν auf. Im übrigen ist die letzte Auffassung, wie schon Voigt gefunden hat, nicht sehr zutreffend. Bezeichnet man nämlich die in der Volumeneinheit während einer Schwingung in Wärme umgewandelte Arbeit als Dämpfung, dann müßte die Dämpfung bei dem Idealstoff (3) mit der Frequenz der Schwingung zunehmen, während sie bei den Metallen weitgehend frequenzunabhängig ist, dagegen nimmt die Dämpfung mit der Amplitude stark zu, was ebenfalls dem Stoff (3) widerspricht. Die Dämpfung rührt eben größtenteils von einer Hysteresis her, die schon bei sehr langsamen Schwingungen auftritt und eine typische Eigenschaft der zyklischen Bewegung der Stoffe ist. Man wird einstweilen solche zyklischen Bewegungen gesondert behandeln und ihre kennzeichnenden Größen, z. B. die Dämpfung, als Funktion der Amplitude und der Frequenz ermitteln, ohne von der Vorstellung eines speziellen Idealstoffes auszugehen. Dieser Weg ist von O. Föppl und seinen Schülern eingeschlagen worden[14a]).

Der Stoff (7) enthält noch das Relaxationsglied. Die Relaxation der Spannung erfolgt hier nicht mehr bis auf Null, sondern nur bis auf

$$\tau = a\gamma .$$

Die Stoffe (4) und (8) stellen feste Körper dar, deren Spannungs-Schiebungsdiagramm bei sehr langsamer Bewegung nach Abb. 1 verläuft. Verschiebungen können erst nach Überschreiten der Grenze τ_0 stattfinden. Abb. 1 ist ein stilisiertes Spannungs-Verformungsdiagramm von Metallen mit einer sogenannten „Fließgrenze" und Verfestigung. Bezeichnen wir den Überschuß der Spannung über die „statische" Spannung $\tau_0 + a\gamma$ mit

$$\tau^* = \tau - \tau_0 - a\gamma ,$$

dann besteht zwischen τ^* und $\dot{\gamma}$ der gleiche Zusammenhang wie in der zähen Flüssigkeit (1) bzw. (5). Man kann die Zähigkeitskonstante eines festen Körpers definieren durch

$$\lim_{\substack{t \to \infty \\ \tau^* \to 0}} \frac{\tau^*}{\dot{\gamma}} = \nu \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12),$$

wo τ^* konstant gehalten werden soll. Bei der Bewegung der Stoffe (3) (7) (4) (8) muß die Voraussetzung kleiner Verformungen gemacht werden, da in den Differentialgleichungen die Schiebung γ vorkommt. Die Definition 12 für ν ist also nur dann brauchbar, wenn noch innerhalb von Zeiten, in denen die Schiebung klein bleibt, $\dot{\gamma}$ praktisch konstant geworden ist.

Versuche an Kupfer und Stahl von H. Deutler[15]) haben für ν Werte in der Größenordnung von 10^{10} c. g. s. Einheiten ergeben, wobei als „statische" Spannung eine solche bei einer Schiebungsgeschwindigkeit von etwa 0,00001 sek.$^{-1}$ genommen wurde. Bei der Verwendung eines Idealstoffes wie (4) oder (8) bleibt immer einige Willkür in der Festsetzung der sehr kleinen Verformungsgeschwindigkeit, welche für die Ermittlung des „statischen" Zusammenhanges $\tau_{st} = f\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ zugrunde gelegt werden soll. Wahrscheinlich gibt es auch bei den sogenannten festen Stoffen gar keinen „statischen Zusammenhang", vielmehr wird die Spannung mit unbegrenzt abnehmender Verformungsgeschwindigkeit nach Null gehen. Es scheint jedoch angebracht, Idealstoffe wie (4) oder (8) dort zu verwenden, wo der Stoff eine mehr oder weniger ausgeprägte Spannungsgrenze hat, oberhalb deren merkliche Fließ-

[13]) W. Voigt, siehe a. a. O.
[14]) K. Jokibe und S. Sakai, Phil. Mag. 6, 42 (1921), S. 397.
[14a]) Z. B. Föppl, Becker, Heydekampf, Dauerprüfung der Werkstoffe, Berlin 1929.
[15]) Phys. ZS. 33 (1932), 247.

geschwindigkeiten auftreten, etwa wie in Abb. 2[16]). Dieser Fall scheint bei den Metallen vorzuliegen. Wählt man als statische Kurve $\tau_{st} = f\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ eine solche, wie sie sich bei einem sehr langsamen Torsionsversuch ergibt, dann erzeugt eine Last $\tau < \tau_{st}$ eine Schiebegeschwindigkeit, die praktisch Null ist, dagegen erzeugt eine Last $\tau > \tau_{st}$ eine merkliche Verformungsgeschwindigkeit, die für kleine $\tau - \tau_{st}$ dieser Differenz proportional ist.

Bei der Zuordnung der Idealstoffe (4) und (8) zu den nichtelastischen Bewegungen in Metallen muß noch vorausgesetzt werden, daß γ dauernd wächst, denn bei Umkehr der Bewegung gilt die statische Kurve Abb. 1 nicht mehr.

Die 4 in Stoff (8) auftretenden Konstanten haben folgende physikalische Bedeutung: τ_0 wird vielfach „Fließgrenze" genannt. Wir müssen darauf hinweisen, daß dieser Ausdruck leicht irreführen kann. Er hat sich in Anlehnung an das Verhalten von Stahl gebildet, bei welchem man im Spannungs-Verformungsdiagramm Abb. 3 ein elastisches Gebiet $0-a$, eine obere Fließgrenze τ_{fl_o}, eine untere Fließgrenze τ_{fl_u}, ein Fließgebiet bei praktisch konstanter Spannung τ_{fl_u} und ein Verfestigungsgebiet $b-c$ bei wachsendem τ unterscheidet. Andere Metalle wie Kupfer haben keine Fließgrenze und kein Fließgebiet im obigen Sinn (Abb. 4). Es ist daher zweckmäßiger, das Wort „Fließgrenze" zu verwenden für die Spannungsgrenze, oberhalb deren merkliche Verformungsgeschwindigkeiten auftreten entsprechend Abb. 2. In diesem Sinne geben die Abb. 3 und 4 die Abhängigkeit der Fließgrenze von der Verformung

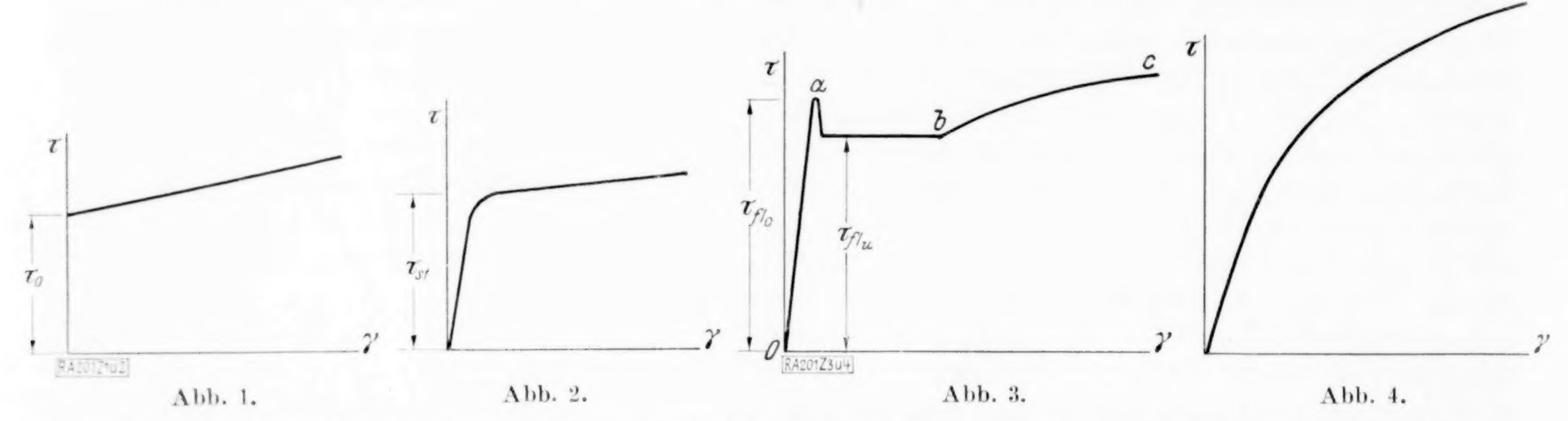


Abb. 1. Abb. 2. Abb. 3. Abb. 4.

wieder. Die Stilisierung dieser „Fließgrenzenfunktion", oder wie wir oben sagten, der statischen Spannung in Abhängigkeit von der Verformung entsprechend Abb. 1 kann zwar für die Rechnung — insbesondere mit $a=0$ — vorteilhaft sein, man kann jedoch ebensogut statt $\tau = \tau_0 + a\gamma$ allgemeiner schreiben $\tau = f\left(\frac{\gamma}{2}\right)$. Das wesentliche der Idealstoffe (4) und (8) ist eben die Einführung einer statischen Spannung oder besser einer Fließspannung, unterhalb deren der Stoff in Ruhe bleibt und oberhalb deren er zu fließen beginnt.

a ist das Maß für die Verfestigung, ν ist die Zähigkeitskonstante, welche aber nach Gl. (12) definiert ist im Gegensatz zu der von Hettwer und Barus verwendeten Zähigkeitskonstanten μ nach Gl. (11). $\frac{\nu}{\beta}$ ist die Relaxationszeit, die Relaxation erfolgt jetzt nur noch bis zur statischen Spannung τ_{st}, $\frac{\nu}{\beta}$ ist bei Metallen klein (Bruchteile einer Sekunde).

9. Der tensorielle Zusammenhang zwischen Spannungen und Verformungen bei den einzelnen Idealstoffen. Wir wollen jetzt die Gl. (1) bis (8) in Tensorform verallgemeinern, und zwar wollen wir zunächst τ auffassen als Funktion von γ, $\dot{\gamma}$ und $\dot{\tau}$.

Die oben besprochenen Verallgemeinerungen heißen dann:

$$\Sigma_0 = 2\mu \dot{E}_0 \quad . \quad . \quad (1')$$

$$\frac{\Sigma_0}{\sqrt{\Sigma_0'{}_{II}}}\left(\sqrt{\Sigma_0'{}_{II}} - \tau_0\right) = 2\mu \dot{E}_0 \quad . \quad . \quad (2')$$

$$\Sigma_0 - 2aE_0 = 2\nu \dot{E}_0 \quad . \quad . \quad (3')$$

$$\frac{\Sigma_0}{\sqrt{\Sigma_0'{}_{II}}}\left(\sqrt{\Sigma_0'{}_{II}} - \tau_0\right) - 2aE_0 = 2\nu \dot{E}_0 \quad . \quad . \quad (4')$$

$$\Sigma_0 = 2\mu \dot{E}_0 - \frac{\mu}{\beta}\dot{\Sigma}_0 \quad (5')$$

$$\frac{\Sigma_0}{\sqrt{\Sigma_0'{}_{II}}}\left(\sqrt{\Sigma_0'{}_{II}} - \tau_0\right) = 2\mu \dot{E}_0 - \frac{\mu}{\beta}\dot{\Sigma}_0 \quad (6')$$

$$\Sigma_0 - 2aE_0 = 2\nu \dot{E}_0 - \frac{\nu}{\beta}\dot{\Sigma}_0 \quad (7')$$

$$\frac{\Sigma_0}{\sqrt{\Sigma_0'{}_{II}}}\left(\sqrt{\Sigma_0'{}_{II}} - \tau_0\right) - 2aE_0 = 2\nu \dot{E}_0 - \frac{\nu}{\beta}\dot{\Sigma}_0 \quad (8')$$

[16]) In Abb. 2 ist $\dot{\gamma}$, nicht γ, als Abszisse aufgetragen.

Die Verallgemeinerung (1′) der zähen Flüssigkeit wurde schon in der klassischen Kontinuumsmechanik vorgenommen. Die Verallgemeinerung (5′) des Maxwellschen Vorschlages wurde von L. Natanson[17]) angegeben. Die Verallgemeinerung (2′) des Binghamschen Vorschlages wurde von H. Hencky[18]) angegeben, allerdings von anderen Vorstellungen als Bingham ausgehend. Der Stoff (3′) wurde auch in dieser verallgemeinerten Form schon von Voigt vorgeschlagen[19]). Die übrigen Idealstoffe sind unseres Wissens noch nicht verwendet worden.

Für sehr langsame Bewegung geht (4′) und (8′) über in die statische Beziehung

$$\frac{\Sigma_0}{\sqrt{\Sigma_0{}'_{II}}}\left(\sqrt{\Sigma_0{}'_{II}}-\tau_0\right)=2\,a\,E_0 .$$

Das bedeutet, daß im statischen Fall (sehr langsame Bewegung) der Spannungsdeviator Σ_0 dem Verformungsdeviator E_0 proportional ist. Unsere Versuche an Stahlrohren bei kombinierter Zug- und Torsionsbeanspruchung[20]) haben gezeigt, daß die Koaxialität und damit erst recht die Proportionalität zwischen Σ_0 und E_0 im allgemeinen nicht erfüllt ist. Wir versuchen daher (4) und (8) in anderer Weise zu verallgemeinern, und zwar so, daß wir τ auffassen als Funktion von $\dot{\gamma}$ und $\dot{\tau}$ allein.

Wir erhalten

$$\frac{\Sigma_0}{\sqrt{\Sigma_0{}'_{II}}}\left(\sqrt{\Sigma_0{}'_{II}}-\tau_0-2\,a\sqrt{E_0{}'_{II}}\right)=2\,\nu\,\dot{E}_0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4'') ,$$

$$\frac{\Sigma_0}{\sqrt{\Sigma_0{}'_{II}}}\left(\sqrt{\Sigma_0{}'_{II}}-\tau_0-2\,a\sqrt{E_0{}'_{II}}\right)=2\,\nu\,\dot{E}_0-\frac{\nu}{\beta}\,\dot{\Sigma}_0 \quad\ldots\ldots \quad (8'') .$$

Im statischen Fall erhalten wir jetzt nur eine skalare Gleichung

$$\sqrt{\Sigma_0{}'_{II}}=\tau_0+2\,a\sqrt{E_0{}'_{II}} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13) .$$

Bei der Anwendung auf das Fließen von Metallen müssen wir wieder eine Beschränkung einführen, welche der Bedingung $\dot{\gamma}>0$ beim einachsigen Fall entspricht. Es ist naheliegend, hierfür die Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{E_0{}'_{II}}>0$$

zu nehmen. Die Gl. (13) in der verallgemeinerten Form

$$\sqrt{\Sigma_0{}'_{II}}=f\left(\sqrt{\Sigma_0{}'_{II}}\right)$$

wurde von R. Schmidt[21]) an Stahl recht genau bestätigt für den Fall, daß der Spannungsdeviator während der Verformung sich ähnlich bleibt. Ist letztere Bedingung nicht erfüllt, dann treten Abweichungen ein, welche ihre Ursache wahrscheinlich in einer Strukturbildung infolge des Fließvorgangs haben und mit den Ansätzen für isotrope Stoffe kaum zu erfassen sind.

10. Idealstoffe mit verschwindender Zähigkeit. Wir wollen jetzt noch einige Sonderfälle diskutieren, die sich ergeben, wenn die Zähigkeit μ bzw. ν nach Null geht. (1′) und (5′) werden dann zu

$$\Sigma_0=0 .$$

Wir haben die reibungslose ideale Flüssigkeit. Aus (2′) wird für verschwindendes μ

$$\Sigma_0=\lambda\,\dot{E}_0$$

$$\sqrt{\Sigma_0{}'_{II}}=\tau_0 ,$$

wo λ ein unbestimmter Koeffizient ist. Es sind dies die Gleichungen des Saint-Venant-Misesschen Körpers[22]). Aus (3′) wird für verschwindendes ν der ideal elastische Körper

$$\Sigma_0=2\,a\,E_0 .$$

[17]) L. Natanson, ZS f. phys. Chem. 38 (1901), S. 690, und 40 (1901), S. 581.
[18]) H. Hencky, ZS ang. Math. u. Mech. 5 (1925), S. 115.
[19]) W. Voigt, siehe a. a. O.
[20]) K. Hohenemser und W. Prager, ZS ang. Math. u. Mech. 12 (1932), 1.
[21]) Ing. arch. 3 (1932) 215.
[22]) R. von Mises, Gött. Nachr. math. phys. Kl. 1913.

Aus (6') wird für verschwindendes μ

$$\Sigma_0 = \lambda\left(\dot{E}_0 - \frac{1}{\beta}\dot{\Sigma}_0\right)$$

$$\sqrt{\Sigma_0{}'_{II}} = \tau_0,$$

wo wieder λ ein unbestimmter Koeffizient ist. Wir haben hier die Gleichungen, die A. Reuß[23]) für das plastische Verhalten der Metalle vorschlug[24]).

Aus (8'') wird für verschwindendes ν

$$\left.\begin{aligned} \Sigma_0 &= \lambda\left(\dot{E}_0 - \frac{1}{\beta}\dot{\Sigma}_0\right) \\ \sqrt{\Sigma_0{}'_{II}} &= \tau_0 + 2a\sqrt{E_0{}'_{II}} \end{aligned}\right\} \qquad (8''')$$

mit unbestimmtem λ, das ist eine Erweiterung der Reußschen Gleichungen mit Berücksichtigung der Verfestigung. Setzt man statt der zweiten skalaren Gleichung allgemeiner

$$\sqrt{\Sigma_0{}'_{II}} = f\left(\sqrt{E_0{}'_{II}}\right),$$

dann hat man einen Idealstoff, der verhältnismäßig gut die Erscheinungen bei nicht zu langsamen und nicht zu schnellen plastischen Verformungen von Stahl wiedergibt, wie unsere oben erwähnten Versuche an Stahlrohren zeigen. Es treten zwar systematische Abweichungen von den obigen Gleichungen und gewisse Unstetigkeiten auf, die wahrscheinlich auf Anisotropien zurückzuführen sind, die während der Verformung entstehen. Jedenfalls kommt aber von allen einfachen Idealstoffen, die wir hier behandelt haben, (8''') dem Verhalten von Stahl am nächsten. Bei schnelleren Verformungen wird man noch die Zähigkeit berücksichtigen und (8'') verwenden. Die Einführung endlicher Zähigkeit kann aber auch aus anderen Gründen zweckmäßig sein. Dadurch, daß man μ bzw. ν gleich Null gesetzt hat, erniedrigt man die Ordnung der Differentialgleichungen für die Bewegung der betreffenden Stoffe und beraubt sich so der Möglichkeit, gewisse Randbedingungen zu erfüllen, die gleichwohl physikalisch von großer Bedeutung sein können. Im Fall der reibungslosen Flüssigkeit ist dies längst bekannt, und man ist schon lange dazu übergegangen, die Reibung in der Grenzschicht zu berücksichtigen, da sie erst ein Verständnis der Strömungen auch in nahezu reibungslosen Medien ermöglicht. Ähnlich liegen die Verhältnisse bei dem Saint-Venant-Misesschen Körper, dem Prandtl-Reußschen Idealstoff und dem Stoff (8'''). Es ist denkbar, daß auch diese zähigkeitsfreien Stoffe nicht ausreichend zum Verständnis der plastischen Bewegung sein werden, und daß man auf die vollkommeneren Stoffe (2') und (8'') wird zurückgreifen müssen. Spannungen und Verformungen kommen in allen Gleichungen der besprochenen Idealstoffe linear vor und brauchen im Fall der quasigeordneten Bewegung lediglich durch ihre Mittelwerte ersetzt zu werden.

11. Zusammenfassung. Ausgehend von den allgemeinen Bewegungsgleichungen der geordneten und der quasigeordneten Bewegung eines deformierbaren Stoffes, werden die allgemeinen Voraussetzungen für die Theorie der später behandelten Idealstoffe entwickelt. Auf Grund einer Systematik der einfachsten Idealstoffe werden die Begriffe „flüssig" und „fest" fixiert und die wesentlichen Eigenschaften der Idealstoffe, soweit sich diese auf den reinen Schiebungsversuch beziehen, diskutiert. Es wird gezeigt, in welcher Weise die Ergebnisse des reinen Schiebungsversuches tensoriell verallgemeinert werden können und es werden gewisse durch Versuchsergebnisse nahegelegte Verallgemeinerungen vorgenommen. Durch Übergang zu verschwindender Zähigkeit werden außer der reibungslosen Flüssigkeit und dem ideal elastischen Körper auch alle bisher vorgeschlagenen „plastischen" Körper als Sonderfälle der hier behandelten Idealstoffe gewonnen. Obwohl nach Möglichkeit Versuchsergebnisse zum Vergleich mit der Theorie der Idealstoffe herangezogen werden, enthalten die hier dargestellten Ansätze naturgemäß ein gut Teil Spekulation. Wir glauben jedoch, daß derartige Betrachtungen geeignet sind, der experimentellen Forschung, insbesondere dem Materialprüfungswesen, scharfe Definitionen für Begriffe zu geben, die vielfach in unklaren und sich widersprechenden Bedeutungen gebraucht werden und deren eindeutige Fixierung von großer Wichtigkeit ist. 201

[23]) A. Reuß, ZS ang. Math. u. Mech. 10 (1930), S. 266.

[24]) Für den ebenen Spannungszustand wurden diese Gleichungen schon von L. Prandtl angegeben, Verh. 1. int. K. tech. Mech. Delft 1924, S. 43.

Das Ausknicken von allseitig befestigten und gedrückten rechteckigen Platten.

Von *K. Sezawa* in Tokyo.

Im Jahre 1891 hat Bryan[1]) die Lösung des Problemes einer rechteckigen Platte gefunden, welche allseitig gestützt ist und welche von den auf vier Seiten angreifenden Druckkräften zusammengedrückt wird. Der Knickungsfall einer Platte, in welchem die Platte an einem Seitenpaare eingespannt und am anderen gestützt ist, ist von Reißner[2]) untersucht worden. Trotz der Wichtigkeit des Problems für die Baustatik ist der Fall, in welchem die Differentialgleichung des Gleichgewichtes der Platte erfüllt ist und vier Seiten eingespannt sind, noch nicht, so weit ich weiß, untersucht worden. Es ist mir aber gelungen, diesen Fall zu erledigen, da eine Veränderung der Randbedingungen möglich ist, die nicht großen Einfluß auf die resultierende Lösung des elastischen Problemes der rechteckigen Platte ausübt[3]).

Die rechteckige Platte möge durch die Geraden $x = \pm \frac{a}{2}$, $y = \pm \frac{b}{2}$ begrenzt sein und parallel zur x-Achse und zur y-Achse unter dem Drucke P_1 und P_2 (bezogen auf die Längeneinheit der gedrückten Seiten) stehen. Ist w die Ausweichung der Platte, so erhält man die Differentialgleichung des Gleichgewichtes in dem kritischen Zustande der Stabilität in der Form:

$$N\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) + P_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (1),$$

wo

$$N = \frac{1}{12}\frac{E h^3}{(1 - \alpha^2)} \quad \ldots \ldots \ldots (2);$$

E ist der Elastizitätsmodul, α die Poissonsche Zahl, h die Dicke der Platte.

Wenn vier Ränder der Platte eingespannt sind, hat man die Beziehungen:

$$x = \pm \frac{a}{2}; \qquad w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (3),$$

$$y = \pm \frac{b}{2}; \qquad w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (4).$$

Setzt man in (1)

$$w = W_1 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\Big\} \frac{m \pi x}{a} + W_2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\Big\} \frac{n \pi y}{b} \quad \ldots \ldots \ldots (5),$$

wo W_1 und W_2 bzw. Funktionen von y und x sind, m und $n = 1, 3, 5, \ldots$ in $\cos\frac{m\pi x}{a}$ und $\cos\frac{n\pi y}{b}$, und m und $n = 2, 4, 6, \ldots$ in $\sin\frac{m\pi x}{a}$ und $\sin\frac{n\pi y}{b}$; so erhält man

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{d^4 W_2}{d x^4} + \left\{\frac{P_1}{N} - 2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\}\frac{d^2 W_2}{d x^2} - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\left\{\frac{P_2}{N} - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\} W_2\right]\cos\frac{n\pi y}{b} \\ &+ \left[\frac{d^4 W_1}{d y^4} + \left\{\frac{P_2}{N} - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right\}\frac{d^2 W_1}{d y^2} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left\{\frac{P_1}{N} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right\} W_1\right]\cos\frac{m\pi x}{a} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (6).$$

Der Gl. (6) ist genügt, wenn man jeden Ausdruck innerhalb der eckigen Klammern null setzt. Löst man die so hergestellten zwei Differentialgleichungen, so erhält man die allgemeinen Lösungen in der Form:

$$\left.\begin{aligned} w = &\left[A \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\Big\} \frac{\sqrt{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}}{b} x + B \begin{matrix}\mathfrak{Cof}\\ \mathfrak{Sin}\end{matrix}\Big\} \frac{\sqrt{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}}{b} x\right] \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\Big\} \frac{n\pi y}{b} \\ &+ \left[C \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\Big\} \frac{\sqrt{\sqrt{\gamma^2 + \delta^2} - \gamma}}{a} y + D \begin{matrix}\mathfrak{Cof}\\ \mathfrak{Sin}\end{matrix}\Big\} \frac{\sqrt{\sqrt{\gamma^2 + \delta^2} + \gamma}}{a} y\right] \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\Big\} \frac{m\pi x}{a} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (7),$$

[1]) G. H. Bryan: Proc. Math. Soc., London, Bd. 22 (1891), S. 54 bis 67.
[2]) H. Reißner: Zentralblatt d. Bauverwaltung, Bd. 29 (1909), S. 94 bis 96.
[3]) K. Sezawa: Engineering, London, Bd. 116 (1923), S. 188 bis 191.

wo

$$-\alpha = \frac{P_1 b^2}{2N} - n^2\pi^2, \qquad -\gamma = \frac{P_2 a^2}{2N} - m^2\pi^2,$$
$$\beta^2 = n^2\pi^2\left(\frac{P_2 b^2}{N} - n^2\pi^2\right), \qquad \delta^2 = m^2\pi^2\left(\frac{P_1 a^2}{N} - m^2\pi^2\right) \quad \ldots\ldots\ldots (8).$$

Es ist sehr schwierig, diese Gleichungen allen Randbedingungen genügen zu lassen, und daher habe ich die folgende Annäherung angenommen: die Ausweichung auf den Rändern ist null, aber die Neigung ist nicht null an allen Stellen mit Ausnahme der Mittelpunkte aller Seiten, wenn m und $n = 1, 3, 5, \ldots$, außerdem in den Ecken. Wenn m und $n = 2, 4, 6, \ldots$, ist die Neigung in den Punkten $\frac{x}{a}$ und $\frac{y}{b} = \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \ldots$ genau null. Das Resultat dieser Rechnung zeigt, daß den Randbedingungen der Einspannung praktisch genügt ist. Durch Anwendung dieser Annahmen im Falle der ungeraden n hat man

$$A \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} \frac{\sqrt{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}}{2b}\, a + B \begin{Bmatrix}\mathfrak{Cof}\\ \mathfrak{Sin}\end{Bmatrix} \frac{\sqrt{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}}{2b}\, a = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (9),$$

$$\left.\begin{aligned} &\mp\, A \frac{\sqrt{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}}{b} \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} \frac{\sqrt{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}}{2b}\, a \\ &+ B \frac{\sqrt{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}}{b} \begin{Bmatrix}\mathfrak{Sin}\\ \mathfrak{Cof}\end{Bmatrix} \frac{\sqrt{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}}{2b}\, a \mp (C+D)\frac{m\pi}{a} \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} \frac{m\pi}{2} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (10),$$

$$C \cos \frac{\sqrt{\sqrt{\gamma^2+\delta^2}-\gamma}}{2a}\, b + D\, \mathfrak{Cof} \frac{\sqrt{\sqrt{\gamma^2+\delta^2}+\gamma}}{2a}\, b = 0 \quad \ldots\ldots (11),$$

$$\left.\begin{aligned} &\begin{Bmatrix} -(A+B) \\ -\left(A \sin \frac{\sqrt{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}}{2mb}\, a + B\, \mathfrak{Sin} \frac{\sqrt{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}}{2mb}\, a\right) \end{Bmatrix} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{n\pi}{2} \\ &= C \frac{\sqrt{\sqrt{\gamma^2+\delta^2}-\gamma}}{a} \sin \frac{\sqrt{\sqrt{\gamma^2+\delta^2}-\gamma}}{2a}\, b - D \frac{\sqrt{\sqrt{\gamma^2+\delta^2}+\gamma}}{a}\, \mathfrak{Sin} \frac{\sqrt{\sqrt{\gamma^2+\delta^2}+\gamma}}{2a}\, b \end{aligned}\right\} \quad \ldots (12).$$

Die oberen und unteren Ausdrücke für die ersten und dritten Glieder von (10) und für die linke Seite von (12) treten ein, je nachdem der Wert von m ungerade oder gerade ist.

Eliminiert man A, B, C, D aus (9), (10), (11), (12) und benutzt man die Beziehungen (8), so findet man die kritischen Werte von P_1 und P_2. Da es sehr schwer ist, die kritischen Druckkräfte auf diesem Wege zu erhalten, habe ich ein Probierverfahren eingeschlagen, nach welchem nur die alle Beziehungen (8), (9), (10), (11), (12) zufriedenstellenden Werte für die verschiedenen $P_1 : P_2$ angenommen wurden.

Das Resultat der Berechnung zeigt, daß die folgenden Kombinationen von P_1 und P_2 die kritischen Druckkräfte geben, im Falle der quadratischen Platte, deren Seite von der Länge a ist.

$\frac{P_2}{P_1}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-2
$\frac{P_1 a^2}{N\pi^2}$	10,65	8,80	8,40	7,48	6,41	5,61	13,12	15,20	17,4	18,75	20,0
$\frac{P_2 a^2}{N\pi^2}$	0	2,20	2,80	3,74	4,81	5,61	$-3{,}28$	$-7{,}60$	$-17{,}4$	$-28{,}1$	$-40{,}0$

Der Fall der rechteckigen Platte, in welchem das Verhältnis der Länge a zur Breite b nicht die Einheit ist und die Druckkraft P_2 null ist, ist wichtig in Zusammenhang mit Problemen des Bauwesens, und ich habe auch die Werte von P_1 für gewisse Verhältnisse von $\frac{a}{b}$ berechnet. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tafel vereinigt.

$\frac{P_1}{N}\frac{a^2}{\pi^2}$

$\frac{a}{b}$		0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
Zahl der halben Wellenlängen	1	**4,00**	**5,14**	**10,65**	30,0	—
	2	—	—	11,8	**18,4**	27,7
	3	—	—	—	20,6	**24,2**
	4	—	—	—	—	36,5

Selbstverständlich findet das Ausknicken der Platte statt bei dem kleinsten Wert der kritischen Druckkräfte, welche den verschiedenen Ausknickungsformen entsprechen, und ich habe diese Fälle durch stärkeren Druck angedeutet.

Das Problem des Ausknickens der langen, elastischen Platte, welche an den Rändern eingespannt ist und allseitig gedrückt wird, ist von Nishimura[4]) und mir und von einigen anderen untersucht worden. Die kritische Druckkraft in diesem Falle, welche parallel zur unbegrenzt langen Seite wirkt, ist näherungsweise gleich $7{,}06\,\frac{N\pi^2}{b^2}$ und die halbe Wellenlänge ist ungefähr $0{,}63\,b$. Die vorliegende Untersuchung über die Stabilität einer rechteckigen Platte mit Seiten von begrenzter Länge zeigt, daß der kritische Druck in dem Falle $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$ den Wert $8{,}17\,\frac{N\pi^2}{b^2}\left(=18{,}4\,\frac{N\pi^2}{a^2}\right)$ annimmt und die halbe Wellenlänge etwa $0{,}75\,b$ ist, und daß der kritische Druck im Falle $\frac{a}{b}=2$ den Wert $6{,}05\,\frac{N\pi^2}{b^2}\left(=24{,}2\,\frac{N\pi^2}{a^2}\right)$ annimmt und die halbe Wellenlänge etwa $0{,}67\,b$ ist. Daraus schließe ich, daß die Bedingung des Ausknickens in der Nähe von $\frac{a}{b}=2$ sich tatsächlich derjenigen für $\frac{a}{b}=\infty$ annähert. 204

Wärmeleitung im Rohr bei ungleichmäßiger Wärmebelastung.

Von *Alfred Konejung* in Düsseldorf.

Bisher wurde die Wärmeleitung in zylindrischen Rohren rechnerisch nur untersucht unter der Voraussetzung, daß jede Zylinderfläche eine einheitliche Temperatur aufweist oder, was dasselbe bedeutet, daß der Wärmefluß in radialer Richtung auf dem ganzen Rohrumfang gleich ist. Nun weisen die bestrahlten Siederohre der Wasserrohrkessel stets eine stark ungleichförmige Wärmebelastung auf. Für die Untersuchung der Wärmespannungen[1]) in solchen Rohren ist die Kenntnis des stationären Temperaturfeldes notwendig. Ferner wird die strenge Lösung gebraucht, wenn aus Temperatur-Messungen an der inneren und äußeren Rohrwand die Verteilung der Wärmebelastung auf den Rohrumfang ermittelt werden soll.

Aufstellung der Differentialgleichung. Im nachfolgenden bedeuten:

$Q_{1,2,3,4}$ die Wärmemenge in kcal/h

r, φ die Polar-Koordinaten eines Rohrelementes

λ die Wärmeleitfähigkeit des Rohrwerkstoffes

ϑ die Temperatur eines Rohrelementes.

[4]) K. Sezawa u. G. Nishimura: Jour. Soc. Nav. Arch., Tokyo, Bd. 47 (1931), S. 129 bis 146.
[1]) Konejung, Beanspruchung von Siede- und Überhitzerrohren. Die Wärme 1930 Nr. 48, S. 891.

Entsprechend dem Zweck der Untersuchung und den Verhältnissen bei Siederohren setzen wir voraus, daß Beharrungszustand herrscht und daß die Wärmebelastung auf der Rohrlänge gleichmäßig verteilt ist.

Die Wärmebilanz für das Rohrelement in Abb. 1 lautet:

$$d\,Q_1 - d\,Q_2 + d\,Q_3 - d\,Q_4 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Abb. 1.

Für die Rohrlänge 1 ergeben sich die einzelnen Summanden wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} d\,Q_1 &= (r + d\,r) \cdot d\,\varphi \cdot \lambda \cdot \frac{\partial}{\partial\,r}\left(\vartheta + \frac{\partial\,\vartheta}{\partial\,r}\,d\,r\right) \\ d\,Q_2 &= r\,d\,\varphi \cdot \lambda \cdot \frac{\partial\,\vartheta}{\partial\,r} \\ d\,Q_3 &= d\,r \cdot \lambda \cdot \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial\,\varphi}\left(\vartheta + \frac{\partial\,\vartheta}{\partial\,\varphi}\,\partial\,\varphi\right) \\ d\,Q_4 &= d\,r \cdot \lambda \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\,\vartheta}{\partial\,\varphi} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Nach einigen Umformungen erhält man aus Gleichung (1) und (2)

$$\frac{\partial^2\,\vartheta}{\partial\,r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\,\vartheta}{\partial\,r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2\,\vartheta}{\partial\,\varphi^2} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

Zu dem gleichen Ergebnis gelangt man noch schneller, indem man die allgemeine Vektor-Gleichung für die stationäre Wärmeleitung: $\operatorname{div}\operatorname{grad}\,\vartheta = 0$ in Zylinder-Koordinaten anschreibt und berücksichtigt, daß gemäß Voraussetzung $\frac{\partial\,\vartheta}{\partial\,x} = 0$ (x = Koordinate der Achse).

Allgemeine Lösung. Eine partikuläre Lösung dieser partiellen Differential-Gleichung zweiter Ordnung (3) ist folgende:

$$\vartheta_k = r^{\pm k} \cdot e^{\pm i k \varphi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4),$$

worin k ein durch die Randbedingungen zu bestimmender Festwert und i die imaginäre Einheit bedeuten.

Durch Differentiation nach r und φ kann man sich leicht überzeugen, daß Gl. (4) der partiellen Differential-Gleichung (3) genügt.

Eine weitere Lösung der Gl. (3) ist folgende:

$$\vartheta = a \cdot \ln r + b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5),$$

worin a und b Festwerte sind.

Wir formen Gl. (4), die in dieser Form nicht ohne weiteres brauchbar ist, in geeigneter Weise um. Nach einem bekannten Satz ist

$$e^{\pm i k \varphi} = \cos(k\,\varphi) \pm i \sin(k\,\varphi) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6),$$

damit geht Gl. (4) über in

$$\vartheta_k = r^{\pm k} \cdot [\cos(k\,\varphi) \pm i \sin(k\,\varphi)].$$

Da die rechte Seite eine komplexe Funktion ist, muß sich auch die linke aus einem reellen und einem imaginären Teil zusammensetzen. Für das positive und negative Vorzeichen erhält man also folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_1 + i\,\vartheta_2 &= A \cdot r^{+k} \cdot [\cos(k\,\varphi) + i \sin(k\,\varphi)] \\ \vartheta_1 + i\,\vartheta_2 &= B \cdot r^{-k} \cdot [\cos(k\,\varphi) - i \sin(k\,\varphi)] \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7),$$

darin bedeuten A und B Festwerte.

Aus diesen beiden Gleichungen folgt durch Addieren:

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_1 &= \frac{1}{2}\left(A\,r^k + B\,r^{-k}\right)\cdot\cos(k\varphi)\\ \vartheta_2 &= \frac{1}{2}\left(A\,r^k - B\,r^{-k}\right)\cdot\sin(k\varphi)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Schreibt man für $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$ die Buchstaben $C_1\,C_2\ldots\ldots$, so erhält man aus den Gl. (5) und (8) für ϑ die allgemeine Lösung[2])

$$\left.\begin{aligned}\vartheta = &\left(C_1 r^k + C_2 r^{-k}\right)\cdot\cos(k\varphi)\\ &+\left(C_3 r^k + C_4 r^{-k}\right)\cdot\sin(k\varphi)\\ &+ C_5\cdot\ln r + C_6\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Einführung der Randbedingungen. Auf der Außenseite des Rohres soll wieder in Anlehnung an die Verhältnisse bei bestrahlten Siederohren die zugeführte Wärmemenge gegeben sein.

Auf der Innenseite dagegen sei die Wärmeübergangszahl Wand-Wasser und die Temperatur des siedenden Wassers gegeben.

Im nachfolgenden sei

q die Wärmebelastung der Rohroberfläche in kcal/m²h eine Funktion von φ
r_a der äußere Radius
r_i der innere Radius
α die Wärmeübergangszahl Wand-Wasser
ϑ_w die Temperatur des Wassers.

Die erste Randbedingung kann man dann einführen durch die Gleichung

$$q = \lambda\cdot\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\right)_{\text{für } r = r_a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

Die zweite Randbedingung kann durch folgende Formel eingeführt werden:

$$\lambda\cdot\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\right)_{\text{für } r = r_i} = \alpha(\vartheta_i - \vartheta_w) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

Für die Außenseite erhalten wir damit folgende Bedingung:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\vartheta}{\partial r} = &\left(C_1 k\cdot r_a^{k-1} - C_2 k\cdot r_a^{-k-1}\right)\cos(k\varphi)\\ &+\left(C_3 k\cdot r_a^{k-1} - C_4 k\, r_a^{-k-1}\right)\sin(k\varphi)\\ &+ C_5\cdot\frac{1}{r_a} = \frac{q}{\lambda} = f(\varphi)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12).$$

Für die Innenseite ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\vartheta}{\partial r} = &\left(C_1 k\cdot r_i^{k-1} - C_2 k\, r_i^{-k-1}\right)\cos(k\varphi)\\ &+\left(C_3 k\cdot r_i^{k-1} - C_4 k\, r_i^{-k-1}\right)\sin(k\varphi)\\ &+ C_5\,\frac{1}{r_i} = \frac{\alpha}{\lambda}\,(\vartheta_i - \vartheta_w)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13).$$

Ist q als Funktion von φ gegeben, so lassen sich die Festwerte C und k bestimmen.

[2]) Nach einer Mitteilung von Herrn Dr. Ludwig, Hannover, kann man den Durchgang durch Komplexe vermeiden, wenn man Gl. (3) in der Form schreibt: $\frac{\partial r \frac{\partial\vartheta}{\partial r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\varphi^2} = 0$ und den Ansatz macht $\vartheta = r^n\cdot f(\varphi)$; man erhält dann $\vartheta = r^n\,(k_1 \sin n\varphi + k_2 \cos n\varphi)$.

Ermittlung des Temperaturfeldes bei beliebiger Wärmebelastung. Die Wärmebelastung q sei durch eine Fourier sche Reihe von der Form

$$q = a_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} a_k \cdot \cos(k\varphi) + \sum_{k=1}^{k=\infty} b_k \cdot \sin(k\varphi) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

gegeben. (Liegt $q = f(\varphi)$ in Form einer Kurve vor, so kann q durch harmonische Analyse in die Form (14) gebracht werden.)

Führt man Gl. (14) in Gl. (12) ein und beachtet, daß jedem Glied der rechten Seite ein gleichartiges auf der linken Seite entsprechen muß, so sieht man, daß die Temperatur-Gleichung (9) für beliebige Verteilung der Wärmebelastung folgende Form erhält:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= \sum_{k=1}^{k=\infty} (A_k \cdot r^k + B_k \cdot r^{-k}) \cdot \cos(k\varphi) \\ &+ \sum_{k=1}^{k=\infty} (C_k \cdot r^k + D_k \cdot r^{-k}) \cdot \sin(k\varphi) \\ &+ E \cdot \ln r + F \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15).$$

Die Konstanten A bis F ermittelt man, indem man die Gleichung nach r differenziert und in die Gl. 10 und 11 einsetzt. Aus den Gliedern mit $\cos(k\varphi)$ folgt z. B. für die Außenseite

$$A_k \cdot k \cdot r_a^{k-1} - B_k \cdot k \cdot r_a^{-k-1} = \frac{a_k}{\lambda}$$

und für die Innenseite

$$A_k \cdot k\, r_i^{k-1} - B_k \cdot k \cdot r_i^{-k-1} = \frac{\alpha}{\lambda} (A_k \cdot r^k + B_k \cdot r^{-k}) .$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich die Koeffizienten A_k und B_k ermitteln.

Ermittlung des Temperaturfeldes für einen Sonderfall. Die Wärmebelastung sei gegeben durch die Gleichung

$$q = q_1 \cdot \cos\varphi + q_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16).$$

Diese Form entspricht in erster Annäherung den Verhältnissen bei bestrahlten Siederohren. Führt man diese Gleichung in Gl. (12) ein, so sieht man, daß auf der rechten Seite die Sinus-Funktion fehlt, folglich kann auch links kein Sinus stehen. Die Festwerte C_3 und C_4 müssen also Null sein. Auf der rechten Seite hat k den Wert 1, also ist auch links $k = 1$. Ferner müssen die konstanten Glieder links und rechts gleich sein. Also ist

$$C_5 \cdot \frac{1}{r_a} = \frac{q_2}{\lambda} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17).$$

Daraus folgt:

$$C_5 = \frac{r_a \cdot q_2}{\lambda} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18).$$

Ferner ergibt sich mit $k = 1$

$$C_1 - C_2\, r_a^{-2} = \frac{q_1}{\lambda} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19).$$

Auf der Innenseite ist

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} &= (C_1 - C_2\, r_i^{-2}) \cos\varphi + \frac{r_a\, q_2}{r_i\, \lambda} \\ &= \frac{\alpha}{\lambda}\left[(C_1 \cdot r_i + C_2\, r_i^{-1}) \cdot \cos\varphi + \frac{r_a}{\lambda} \cdot q_2 \cdot \ln r_i + C_6 - \vartheta_w\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (20).$$

Daraus folgt

$$C_6 = \frac{r_a \cdot q_2}{r_i \cdot \alpha} + \vartheta_w - \frac{r_a}{\lambda} \cdot q_2 \cdot \ln r_i \quad \ldots \quad (21)$$

und

$$C_1 - C_2 \cdot r_i^{-2} = \frac{a}{\lambda} C_1 \cdot r_i + \frac{a}{\lambda} C_2 r_i^{-1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (22).$$

Aus den beiden Gl. (19) und (22) mit den beiden Unbekannten C_1 und C_2 ergibt sich algebraisch

$$C_1 = \frac{\frac{q_1}{r_i^2} \cdot \left(1 + \frac{a}{\lambda} r_i\right)}{\frac{\lambda}{r_i^2}\left(1 + \frac{a}{\lambda} r_i\right) - \frac{\lambda}{r_a^2}\left(1 - \frac{a}{\lambda} r_i\right)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (23),$$

$$C_2 = \frac{q_1\left(1 - \frac{a}{\lambda} r_i\right)}{\frac{\lambda}{r_i^2}\left(1 + \frac{a}{\lambda} r_i\right) - \frac{\lambda}{r_a^2}\left(1 - \frac{a}{\lambda} r_i\right)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (24).$$

Setzt man für $C_5 \cdot \ln r + C_6$ den Ausdruck $C_3 \cdot \ln\left(\frac{r}{r_i}\right) + C_4$, so erhält man für den Fall, daß die Wärmebelastung durch die Gl. (16) gegeben ist, die Temperatur der Rohrwand an beliebiger Stelle:

$$\left.\begin{aligned} &\vartheta = \left(C_1 \cdot r + C_2 \cdot \frac{1}{r}\right)\cos\varphi + C_3 \cdot \ln\frac{r}{r_i} + C_4 \\ &\text{darin ist:} \\ &C_1 \ \text{gemäß Gl. (23)} \\ &C_2 \ \text{gemäß Gl. (24)} \\ &C_3 = \frac{r_a}{\lambda} \cdot q_2 \\ &C_4 = \frac{r_a \cdot q_2}{r_i \cdot a} + \vartheta_w \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25).$$

Zahlenbeispiel. Für den zuletzt beschriebenen Fall sei ein Zahlenbeispiel durchgerechnet:

In der Gleichung für die Wärmebelastung

$q = q_1 \cdot \cos\varphi + q_2$

sei $q_1 = 200\,000$ kcal/m² h

und $q_2 = 230\,000$ kcal/m² h,

dem entspricht eine höchste Wärmebelastung auf der dem Feuerraum zugewandten Seite des Siederohres von 430 000 kcal/m² h und eine niedrigste Belastung auf der Leeseite von 30 000 kcal/m² h.

Ferner sei gegeben:

Außendurchmesser des Rohres = 83 mm
Wandstärke = 5,5 mm
a Wand-Wasser = 6000 kcal/m² h °C
λ = 34 kcal/m² h °C.
Die Siedetemperatur des Wassers ϑ_w = 250 °C (entsprechend 40 *atü*).

Dann ergibt sich $C_1 = 3800$, $C_2 = -3{,}6$, $C_3 = 281$, $C_4 = 294$.
Für die Temperaturen der Rohrwand erhält man dann folgende Werte

	Wandtemperatur °C	Höchste Wandtemperatur °C
ϑ_a	$70 \cdot \cos\varphi + 334$	404
ϑi	$37 \cdot \cos\varphi + 294$	331
$\vartheta_a - \vartheta_i$	$33 \cdot \cos\varphi + 40$	73

The application of Heaviside's operational method to the solution of a problem in heat conduction.

By *Sydney Goldstein*, Cambridge (England).

1. Introduction. Many problems in wave-motion and in diffusion, including the conduction of heat, are most conveniently solved by a method due originally to Oliver Heaviside[1]). The method has been clarified and extended by Bromwich[2]) and others, and a general account of it given by Jeffreys[3]), in whose tract references to other publications dealing with the subject will be found.

A summary of the method, and reasons for recommending it, will be given below; and it will then be illustrated by consideration of three related problems in the conduction of heat. In all three problems it is required to find the temperature at any time at any point of a given solid body, which at a given instant ($t=0$) is at a given constant temperature and is placed in a medium at another given, lower, constant temperature, into which radiation takes place from the surface of the solid body. First, we shall consider the solid body to be an infinite slab, of thickness $2l$; second, an infinitely long circular cylinder of radius R; third, a circular cylinder of length $2l$ and radius R. The last problem formed the subject of a paper by Dr. Franz Berger in the Z. f. angew. Math. u. Mech. for February, 1931 (Bd. 11, pp. 45—58), and that is why I have chosen to discuss it here; the first two problems lead up to this one.

2. Summary of Heaviside's Operational Method. This summary is not be regarded as complete; nor will any justification be given here for the rules quoted. The justification, and other rules and formulae, are to be found in the publications previously mentioned.

Let a variable v satisfy one of the differential equations of mathematical physics. Write the equation with all the terms on the left-hand side of the sign of equality and zero on the right. Write down the „auxiliary equation" as follows. If a term $\partial v/\partial t$, where t is the time, occurs on the left, replace it by pv, and add pv_0 to the right side, where v_0 is the initial value of v. If a term $\partial^2 v/\partial t^2$ occurs on the left, replace it by $p^2 v$, and add $p^2 v_0 + p v_0'$ to the right, where v_0' is the initial value of $\partial v/\partial t$. And so on. It is assumed that sufficient initial values are given to ensure that the differential equation and the initial conditions determine the value of v for all subsequent time.

Solve the auxiliary equation for v as if p were a number. This gives a solution $v=\varphi(p)$, say.

Interpret the solution according to one or more of the following rules and methods.

(1) If $\varphi(p)$ is single-valued, and is equal to $f(p)/F(p)$, where $f(p)$ has no poles, then

$$\varphi(p)=\frac{f(0)}{F(0)}+\sum_K \frac{f(K)}{K F'(K)}\, e^{Kt},$$

where the K are the zeros of $F(p)$, and it is assumed that they are all simple and none of them zero. The dash denotes differentiation, and the summation is over all the zeros of $F(p)$. This rule is known as the partial-fraction rule, and gives the solution as a series of normal functions.

(2) The interpretations of several of the most commonly occurring forms of $\varphi(p)$ are known. A list is given by Jeffreys (loc. cit.). Other interpretations are given by van der Pol (Phil. Mag. VIII, 1929, 861—898) and in a forthcoming paper by Goldstein.

(3) The initial value of v is found by making p infinite in $\varphi(p)$. To find a form suitable for computation for small values of t, expand $\varphi(p)$ in the form which would be most suitable for computation of $\varphi(p)$ for large values of p if p were a number, and interpret term by term.

(4) If the system approaches a steady state, i. e. if v tends to a limit as t tends to infinity, this limit is found by letting p tend to zero in $\varphi(p)$. A form suitable for computation for large values of t can sometimes be found by expanding $\varphi(p)$ in a form which would be suitable for the computation of $\varphi(p)$ for small values of p if p were a number, and interpreting term by term. Care is necessary in this, however. This method of interpretation is usually unnecessary if (1) has been successful; and this method is successful when $\varphi(p)$, as a function of p, has a branch point and no poles.

1) Proc. Roy. Soc., A., 52, 1893, 504—529; 54, 1884, 105—143; Electromagnetic Theory; Electrical Papers.

2) Proc. London Math. Soc. (2), 15, 1916, 401—448. and later papers.

3) Operational methods in mathematical physics; no. 23 of the Cambridge tracts in mathematics and mathematical physics, First Edition, 1927. A second edition is in the press.

(5) In any circumstances, the interpretation of $\varphi(p)$ is given by

$$\varphi(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} \varphi(\lambda)\, d\lambda,$$

where $|\arg \lambda| \leq \pi$, and L is a curve from $c - i\infty$ to $c + i\infty$, where c is finite and positive, and all the singularities of the integrand are on the same side of the curve as $-\infty$. For positive values of t, L may usually[4]) be taken to be any curve beginning at infinity in the third quadrant, passing round the origin, and proceeding to infinity again in the second quadrant, provided that all the singularities of the integrand remain on the same side of the curve as $-\infty$.

This rule provides a basis for a justification of the method; and if in doubt, we can discover from this rule if we are justified in interpreting in the other ways.

The rule is due to Bromwich (loc. cit.) and the line integral will be referred to as Bromwich's integral[5]).

(6) If $f(t)$ is the interpretation of $\varphi(p)$, then $f(t)$ is the solution of the integral equation,

$$\varphi(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt.$$

The integral is due to Carson[6]). It is known that Bromwich's integral is the solution of Carson's integral equation.

(7) If $f(t)$ is the interpretation of $\varphi(p)$, then the interpretation of $\varphi(p)\frac{1}{p}$ is $\int_0^t f(t)\, dt$[7]). More generally, if $f_1(t)$ and $f_2(t)$ are the interpretations of $\varphi_1(p)$ and $\varphi_2(p)$ respectively, then the interpretation of $\varphi_1(p)\, \varphi_2(p) \frac{1}{p}$ is

$$\int_0^t f_1(\xi) f_2(t-\xi)\, d\xi = \int_0^t f_1(t-\xi) f_2(\xi)\, d\xi.$$

(8) There are certain other subsidiary rules to be found in the literature which are sometimes useful, *e. g.*

(a) If $f(t)$ is the interpretation of $\varphi(p)$, the interpretation of $\varphi(p+h)$, where h is a positive parameter, is

$$e^{-ht} f(t) + h \int_0^t e^{-ht} f(t)\, dt.$$

(b) If $\varphi(p)$ can be expanded in powers of p^{-1}, the result of operating on $e^{-\alpha t} F(t)$ with $\varphi(p)$ is given by the equation

$$\varphi(p)\, e^{-\alpha t} F(t) = e^{-\alpha t} \varphi(p-\alpha)\, F(t).$$

(c) If $f(t)$ is the interpretation of $\varphi(p)$, the interpretation of $p\varphi(p)$ is $f'(t)$, where, if $\varphi(z)$, as a function of z, has an infinite number of singularities in a strip parallel to the imaginary axis, the condition $f(0) = 0$ is necessary.

(d) If $f(t)$ is the interpretation of $\varphi(p)$, the interpretation of $e^{-hp}\varphi(p)$ is 0 for $t < h$, and $f(t-h)$ for $t > h$, where h is a real parameter.

We are now in a position to make the following small addition to the discussion of the auxiliary equation. If a known function of t occurs as a term in the original differential equation, then in the auxiliary equation it should, if possible, be replaced by its „operational representation". [If $f(t)$ is the interpretation of $\varphi(p)$, then $\varphi(p)$ is called the „operational representation" of $f(t)$.]

---

[4]) A sufficient condition is that $\varphi(\lambda)/\lambda$ should tend to zero uniformly with regard to $\arg \lambda$ (for the values of $\arg \lambda$ concerned) as $|\lambda|$ tends to infinity. Some such condition is also necessary for the truth of the partial fraction rule (1). It is always satisfied in physical examples.

[5]) The statements of this rule and the partial fraction rule are quoted with slight changes from Jeffreys (loc. cit.).

[6]) Electric Circuit Thoery and the Operational Calculus, New York, 1926.

[7]) Jeffreys's exposition of the solution of a system of ordinary differential equations, such as occurs in the theory of the oscillations of a mechanical system with a finite number of degrees of freedom, is based entirely on definite integration.

3. Advantages of Heaviside's Operational Method. The most usual method of solving the problems for which the operational method is recommended is by use of a series of normal functions. Compared with this method, the operational method has the advantages that it is easier to find the coefficients in the series by using the partial fraction rule than by the usual methods, it is not so usual to make mistakes in the working, and errors due to assuming a wrong form for the expansion of an arbitrary function — errors which have certainly been made in the past — are avoided. Finally, and in some ways most important of all, the solution by use of a series of normal functions is unsuitable for computation or for exhibiting the character of the solution when t is small. Thus Berger (loc. cit.) says „Es ist auch hier darauf hinzuweisen, daß für sehr kleine Werte von t die Berechnung der Temperatur dadurch unsicher wird, daß die Konvergenz der Reihen sich mit abnehmendem t verlangsamt." By use of the operational method, it is easy to find a form of the solution especially suitable for small values of t.

Since Bromwich's integral gives the interpretation of an operational solution $\varphi(p)$, the operational method is equivalent to the use of complex integrals. But there is an enormous gain in conciseness of expression, and many steps suggest themselves in the course of the working which would be missed when using the more cumbrous notation.

Somewhat similar remarks apply to the use of Green's functions and integral equations, though in the latter case numerical solutions are occasionally obtainable which are very difficult to obtain by other methods.

In the solution of many problems, it is sufficient to use rules (1) and (3) of § 2, and to make use of known results. This will be the case in the problems solved below. But in obtaining the „known results", use has been made of rules (5) or (6). Examples of the use of all the rules given, and of others, will be found in the literature.

4. Conduction of Heat in a Plane Slab with Radiation at the Surface. At time $t=0$ an infinite slab, of thickness $2l$, at constant temperature, is placed in a medium at another lower constant temperature. As Berger (loc. cit.) points out, there is no loss in generality in taking the initial temperature of the slab as unity, and that of the medium as zero, and we shall therefore do so. We shall use the same notation as Berger; ϑ denotes the temperature, a the thermometric conductivity, h the relative emissivity, t the time, and z distance perpendicular to the face of the slab measured from the middle of the slab. Then ϑ is a function of z and t only, and satisfies the equations

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \quad \text{(1)},$$

$$\vartheta = 1 \quad \text{when } t = 0 \quad \text{(2)},$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} + h\vartheta = 0 \quad \text{when } z = l \quad \text{(3)}$$

$$-\frac{\partial \vartheta}{\partial z} + h\vartheta = 0 \quad \text{when } z = -l \quad \text{(4)}.$$

The „auxiliary equation" is

$$a\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} - p\vartheta = -p \quad \text{(5)},$$

which, if we write

$$p = aq^2 \quad \text{(6)},$$

becomes

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} - q^2\vartheta = -q^2 \quad \text{(7)}.$$

From (3) and (4) it is clear that ϑ is an even function of z, and the solution of (7) required is, therefore,

$$\vartheta = 1 + A\cosh qz. \qquad \left[\cosh qz = \frac{1}{2}(e^{qz} + e^{-qz})\right] \quad \text{(8)}.$$

From (3) [or (4)] it follows that

$$qA\sinh ql + h + hA\cosh ql = 0,$$

and, therefore,

$$A = \frac{-h}{q\sinh ql + h\cosh ql} \quad \text{(9)},$$

$$\vartheta = 1 - \frac{h\cosh qz}{q\sinh ql + h\cosh ql} \quad \text{(10)}.$$

Apply the „partial fraction" rule. The solution is an even function of q, and, therefore, a single-valued function of p. The numerator has no poles; the denominator has zeros when $q = \pm iK$, where

$$-K \sin Kl + h \cos Kl = 0 \quad \ldots \quad (11)$$

or

$$Kl \tan Kl = hl \,^{8)} \quad \ldots \quad (12).$$

The value $-iK$ of q gives the same value, $-aK^2$, of p as the value $+iK$, and, therefore, in applying the partial fraction rule only the values $+iK$ need be considered. If we take

$$f(p) = h \cosh qz, \quad F(p) = q \sinh ql + h \cosh ql \quad \ldots \quad (13),$$

we have

$$\frac{f(0)}{F(0)} = 1 \quad \ldots \quad (14)$$

$$f(p) = h \cos Kz \qquad \text{when } q = iK \quad \ldots \quad (15),$$

$$p \frac{d}{dp} F(p) = \frac{1}{2} q \frac{d}{dq} F(p) = \frac{1}{2} q\,[(1 + hl) \sinh ql + ql \cosh ql] \quad \ldots \quad (16),$$

and when q is equal to iK this is equal to

$$-\frac{1}{2} K\,[(1 + hl) \sin Kl + Kl \cos Kl] \quad \ldots \quad (17).$$

The partial fraction rule therefore gives

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= 1 - \left\{1 - 2 \sum_K \frac{h \cos Kz}{K\{(1+hl)\sin Kl + Kl \cos Kl\}} e^{-aK^2 t}\right\} \\ &= 2 \sum_K \frac{h \cos Kz}{K\{(1+hl)\sin Kl + Kl \cos Kl\}} e^{-aK^2 t} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (18).$$

Now from (11) and (12),

$$h/K = \tan Kl, \qquad hl = Kl \tan Kl,$$

and therefore

$$\left.\begin{aligned} \frac{h}{K\{(1+hl)\sin Kl + Kl \cos Kl\}} &= \frac{\tan Kl}{(1 + Kl \tan Kl) \sin Kl + Kl \cos Kl} \\ &= \frac{\tan Kl}{\sin Kl + Kl/\cos Kl} = \frac{\sin Kl}{Kl + \sin Kl \cos Kl} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (19),$$

so that

$$\vartheta = 2 \sum_K \frac{\sin Kl}{Kl + \sin Kl \cos Kl} \cos Kz \, e^{-aK^2 t} \quad \ldots \quad (20),$$

which is the usual form of the solution.
For $t = 0$, we find

$$1 = 2 \sum_K \frac{\sin Kl}{Kl + \sin Kl \cos Kl} \cos Kz \quad \ldots \quad (21).$$

The summation is over all the positive roots of (12).

For large values of at/l^2, one or two terms of (20) are all that are necessary to provide a satisfactory approximation to the value of ϑ. But the solution (20) is unsuitable for computation or for exhibiting the nature of the solution when at/l^2 is small. To find a form suitable in such circumstances, we expand (10) as follows.

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= 1 - \frac{h\,(e^{qz} + e^{-qz})}{q\,(e^{ql} - e^{-ql}) + h\,(e^{ql} + e^{-ql})} \\ &= 1 - \frac{h\,e^{qz}}{(h+q)\,e^{ql}} (1 + e^{-2qz}) \left(1 + \frac{h-q}{h+q} e^{-2ql}\right)^{-1} \\ &= 1 - \frac{h}{h+q} e^{-q(l-z)} (1 + e^{-2qz}) \left(1 - \frac{h-q}{h+q} e^{-2ql} + \ldots\right) \\ &= 1 - \frac{h}{h+q} e^{-q(l-z)} - \frac{h}{h+q} e^{-q(l+z)} + \frac{h(h-q)}{(h+q)^2} e^{-q(3l-z)} - \ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (22).$$

---

8) The roots of this equation are all real, h being positive.

Now

$$\frac{h\,e^{-qx}}{h+q} = 1 - \operatorname{erf}\frac{x}{2\sqrt{at}} - \exp(h^2 at + hx)\left\{1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + h\sqrt{at}\right)\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

(Jeffreys, loc. cit. p. 60), where

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}\,du \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

and is tabulated by Jahnke and Emde, who call it the „Fehlerintegral", $\Phi(x)$. For large values of x,

$$1 - \operatorname{erf} x \sim \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \frac{1\cdot 3}{2^2 x^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3 x^7} + \dots\right\}.$$

If we neglect all but the first three terms of (22), we find

$$\left.\begin{aligned}\vartheta = 1 &- \left\{1 - \operatorname{erf}\frac{l-z}{2\sqrt{at}} - \exp\left(h^2 at + h\overline{l-z}\right)\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{l-z}{2\sqrt{at}} + h\sqrt{at}\right)\right]\right\} \\ &- \left\{1 - \operatorname{erf}\frac{l+z}{2\sqrt{at}} - \exp\left(h^2 at + h\overline{l+z}\right)\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{l+z}{2\sqrt{at}} + h\sqrt{at}\right)\right]\right\}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (26).$$

When $l-z$ or $l+z$ is not small, we may use (25) to approximate to these expressions. But (26) as it stands applies whether $l-z$ or $l+z$ is small or not.

When an expression such as (26) is available, it is scarcely ever necessary to consider more than four terms of such a series of normal functions as (20) for any value of t.

5. Conduction of heat in an infinite cylinder with radiation at the surface. At time $t=0$ an infinite circular cylinder of radius R, at unit temperature, is placed in a medium at temperature zero. If r is distance from the axis of the cylinder, the temperature ϑ satisfies the equations

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

$$\vartheta = 1 \quad \text{when} \quad t = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial r} + h\vartheta = 0 \quad \text{when} \quad r = R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

The „auxiliary equation" is

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial r} - q^2\vartheta = -q^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

where

$$p = a\,q^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

as before. ϑ must remain finite when $r=0$, and, therefore, with a usual notation for Bessel functions,

$$\vartheta = 1 + A\,I_0(qr)\;[= 1 + A\,J_0(iqr)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

From (3),

$$q\,A\,I_0'(qR) + h + h\,A\,I_0(qR) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

and, therefore,

$$A = \frac{-h}{q\,I_0'(qR) + h\,I_0(qR)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

$$\vartheta = 1 - \frac{h\,I_0(qr)}{q\,I_1(qR) + h\,I_0(qR)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

since

$$I_0'(x)\left(= \frac{d}{dx}I_0(x)\right) = I_1(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Apply the „partial fraction rule". Again the solution is an even function of q, and, therefore, a single-valued function of p. The numerator has no poles; the denominator has zeros when $q = \pm i n$, where

$$i n\,I_1(i n R) + h\,I_0(i n R) = 0,$$

that is,

$$n R J_1(n R) = h R J_0(n R)^{9)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11).$$

As before, only the values $+ i n$ of q need be considered in applying the partial fraction rule. If we take

$$f(p) = h I_0(q r), \quad F(p) = q I_1(q R) + h I_0(q R) \quad \ldots \ldots \quad (12),$$

we have

$$\frac{f(0)}{F(0)} = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

$$f(p) = h J_0(n R) \quad \text{when } q = i n \quad \ldots \ldots \quad (14),$$

$$p \frac{d}{d p} F(p) = \frac{1}{2} q \frac{d}{d q} F(p) = \frac{1}{2} q \left[(1 + h R) I_1(q R) + q R I_1'(q R) \right] \quad . \quad (15),$$

and when q is equal to $i n$ this is equal to

$$-\frac{1}{2} n \left[(1 + h R) J_1(n R) + n R J_1'(n R) \right] \quad \ldots \ldots \quad (16).$$

The partial fraction rule, therefore, gives

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= 1 - \left\{ 1 - 2 \sum_n \frac{h J_0(n r)}{n \left[(1 + h R) J_1(n R) + n R J_1'(n R) \right]} e^{-a n^2 t} \right\} \\ &= 2 \sum_n \frac{h J_0(n r)}{n \left[(1 + h R) J_1(n R) + n R J_1'(n R) \right]} e^{-a n^2 t} \end{aligned} \right\} \quad \ldots \quad (17).$$

Now by a well-known recurrence formula

$$n R J_1'(n R) = n R J_0(n R) - J_1(n R) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18),$$

and, therefore,

$$\frac{h}{n \left[(1 + h R) J_1(n R) + n R J_1'(n R) \right]} = \frac{h}{n \left[h R J_1(n R) + n R J_0(n R) \right]}$$

and on substituting for h from (11), this becomes

$$\frac{J_1(n R)}{J_0(n R) \left[n R J_1^2(n R) / J_0(n R) + n R J_0(n R) \right]} = \frac{J_1(n R)}{n R \left[J_0^2(n R) + J_1^2(n R) \right]} \quad \ldots \quad (19).$$

Again using (11), we see that this is also equal to

$$\frac{n J_1(n R)}{R \left[n^2 J_0(n R) + h^2 J_0(n R) \right]} = \frac{n J_1(n R)}{R (n^2 + h^2) J_0^2(n R)} \quad \ldots \ldots \quad (20).$$

Thus

$$\vartheta = 2 \sum_n \frac{J_1(n R) J_0(n r)}{n R \left[J_0^2(n R) + J_1^2(n R) \right]} e^{-a n^2 t} \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

$$= 2 \sum_n \frac{n J_1(n R) J_0(n r)}{R (n^2 + h^2) J_0^2(n R)} e^{-a n^2 t} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (22).$$

For $t = 0$ we find

$$1 = 2 \sum_n \frac{J_1(n R) J_0(n r)}{n R \left[J_0^2(n R + J_1^2(n R) \right]} = 2 \sum_n \frac{n J_1(n R) J_0(n r)}{R (n^2 + h^2) J_0^2(n R)} \quad \ldots \quad (23).$$

The summation is over all the positive roots of (11)[10].

[9]) The roots of this equation are all real, since h is positive. See, for example, Watson's Bessel Functions, p. 482.

[10]) If initially the temperature of the cylinder is zero, and that of the medium outside is unity, the temperature at any time would be $1 - \vartheta$, where ϑ is given by (22). A similar remark applies to the other problems.

Either (21) or (22) is suitable for large values of at/R^2. For small values, we return to (9), and use the asymptotic expansions of the functions I_0 and I_1 for large positive values of the argument. (See, for example, Watson's Bessel Funktions, p. 203). We thus obtain, as an asymptotic equality for small at/r^2,

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= 1 - \frac{h e^{qr}\left(1+\frac{1}{8qr}+\dots\right)/(2\pi q r)^{\frac12}}{q e^{qR}\left(1-\frac{3}{8qR}+\dots\right)/(2\pi q R)^{\frac12}+h e^{qR}(1+\dots)/(2\pi q R)^{\frac12}} \\ &= 1 - h(R/r)^{\frac12}\frac{e^{-q(R-r)}}{q}\,\frac{\left(1+\frac{1}{8qr}+\dots\right)}{\left(1-\frac{3}{8qR}+\dots\right)+\frac{h}{q}+\dots} \\ &= 1 - h(R/r)^{\frac12}\frac{e^{-q(R-r)}}{q}\left[1+\frac{1}{q}\left(\frac{1}{8r}+\frac{3}{8R}-h\right)+\dots\right] \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad (24).$$

Now it is known[11]) that

$$q^m e^{-qx} = (2/\pi)^{\frac12}(2at)^{-\frac12 m}e^{-x^2/8at}D_{m-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) \quad \dots \quad (25)$$

where $D_m(z)$ satisifes the differential equation

$$D_m''(z)+\left(m+\frac12-\frac14 z^2\right)D_m(z)=0 \quad \dots \quad (26).$$

For large positive values of z, $D_m(z)$ has the asymptotic expansion

$$D_m(z)\sim e^{-\frac14 z^2}z^m\left\{1-\frac{m(m-1)}{2z^2}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot 4z^4}-\dots\right\} \quad \dots \quad (27).$$

It also satisfies the recurrence relation

$$D_{m+1}(z)-zD_m(Z)+mD_{m-1}(z)=0 \quad \dots \quad (28),$$

and

$$D_0(z)=e^{-\frac14 z^2}, \qquad D_{-1}(z)=\left(\frac12\pi\right)^{\frac12}e^{\frac14 z^2}(1-\operatorname{erf} z/\sqrt{2}) \quad \dots \quad (29),$$

so that D_{-2}, D_{-3} etc. are easily found, and could, in fact, be easily tabulated, from the recurrence relation (28).

From (24) it follows that

$$\vartheta = 1-2h(Rat/\pi r)^{\frac12}\left\{D_{-2}\left(\frac{R-r}{\sqrt{2at}}\right)+\left(\frac{1}{8r}+\frac{3}{8R}-h\right)(2at)^{\frac12}D_{-3}\left(\frac{R-r}{\sqrt{2at}}\right)+\dots\right\} \quad \dots \quad (30).$$

When $R-r$ is not small, we can approximate to the D functions by using (27); but (30) as it stands applies whether $R-r$ is small or not, so long as r is not small.

In obtaining (24) or (30) we used not only the asymptotic expansions of $I_1(qR)$ and $I_0(qR)$, but also that of $I_0(qr)$. We thus assumed not only that $R/\sqrt{at}$ is large, but also that $r/\sqrt{at}$ is large. When $R/\sqrt{at}$ is large, but $r/\sqrt{at}$ is small, we can approximate to the result by using the asymptotic expansions of $I_1(qR)$ and $I_0(qR)$, and the series for $I_0(qr)$ in ascending powers of qr. We thus obtain

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= 1-\frac{h I_0(qr)}{q I_1(qR)+h I_0(qR)} \\ &= 1-\frac{h\left\{1+\frac{q^2r^2}{2^2}+\frac{q^4r^4}{2^2\cdot 4^2}+\dots\right\}}{q e^{qR}\left(1-\frac{3}{8qR}+\dots\right)/(2\pi q R)^{\frac12}+h e^{qR}(1+\dots)/(2\pi q R)^{\frac12}} \\ &= 1-h(2\pi R)^{\frac12}q^{-\frac12}e^{-qR}\left\{1+\frac{q^2r^2}{2^2}+\frac{q^4r^4}{2^2 4^2}+\dots\right\}\left\{1+\frac{3}{8qR}-\frac{h}{q}+\dots\right\} \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad (31).$$

We can then interpret term by term by (25), and use the approximation (27) for the D functions. Thus the first approximation for points on or very near the axis is

[11]) See a forthcoming paper by Goldstein.

$$\left.\begin{aligned}\vartheta &= 1 - h\,(2\pi R)^{\frac{1}{2}}\, q^{-\frac{1}{2}}\, e^{-qR} \\ &= 1 - 2\,h\,R^{\frac{1}{2}}\,(2\,at)^{\frac{1}{4}}\, e^{-R^2/8\,at}\, D_{-\frac{3}{2}}\left(\frac{R}{\sqrt{2\,at}}\right) \\ &\sim 1 - 2\,h\,R^{\frac{1}{2}}\,(2\,at)^{\frac{1}{4}}\, e^{-R^2/4\,at}\,(2\,at)^{\frac{3}{4}}/R^{\frac{3}{2}} \\ &= 1 - \frac{4\,h\,at}{R}\, e^{-R^2/4\,at}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (32).$$

In these ways we can find satisfactory approximations when $R/(at)^{\frac{1}{2}}$ is large, and $r/(at)^{\frac{1}{2}}$ is either large or small, but when $r/(at)^{\frac{1}{2}}$ is moderate, the approximations are more complicated, and are probably too complicated to be of much use. In practice, the expressions already found are generally sufficient for computation.

6. Conduction of heat in a finite circular cylinder with radiation at the surface. At time $t = 0$ a circular cylinder of length $2l$ and radius R, at unit temperature, is placed in a medium at temperature zero. If r is distance from the axis of the cylinder, and z distance parallel to the axis measured from its mid point, the temperature ϑ satisfies the equations

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}\right) \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

$$\vartheta = 1 \quad \text{when } t = 0 \quad \ldots \ldots \quad (2),$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial r} + h\,\vartheta = 0 \quad \text{when } r = R \quad \ldots \ldots \quad (3),$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} + h\,\vartheta = 0 \quad \text{when } z = l \quad \ldots \ldots \quad (4),$$

$$-\frac{\partial \vartheta}{\partial z} + h\,\vartheta = 0 \quad \text{when } z = -l \quad \ldots \ldots \quad (5).$$

The equations are linear, and we can build up the complete solution by superposition. Suppose that instead of (2), we have

$$\vartheta = \cos K z \quad \text{when } t = 0 \quad \ldots \ldots \quad (6),$$

where K is a root of the equation § 4 (12), namely

$$K l \tan K l = h l \quad \ldots \ldots \quad (7).$$

Then

$$\vartheta = v(r, t) \cos K z \quad \ldots \ldots \quad (8),$$

where v is a function of r and t only, satisfying the equations

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - K^2 v\right) \quad \ldots \ldots \quad (9),$$

$$v = 1 \quad \text{when } t = 0 \quad \ldots \ldots \quad (10),$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} + h\,v = 0 \quad \text{when } r = R \quad \ldots \ldots \quad (11).$$

The auxiliary equation is

$$a\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - K^2 v\right) - p\,v = -p \quad \ldots \ldots \quad (12).$$

If we write

$$a\,K^2 + p = a\,q^2 \quad \ldots \ldots \quad (13),$$

this becomes

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - q^2 v = -p/a \quad \ldots \ldots \quad (14),$$

and the solution which remains finite on the axis is

$$v = p/a\,q^2 + A\,I_0(q\,r) \quad \ldots \ldots \quad (15).$$

From (11)

$$q\,A\,I_0'(q\,R) + h\,p/a\,q^2 + h\,A\,I_0(q\,R) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (16),$$

and, therefore, since $I_0'(qR) = I_1(qR)$,

$$A = \frac{-hp}{aq^2[qI_1(qR) + hI_0(qR)]} \quad . \quad . \quad . \quad (17),$$

$$v = \frac{p}{aq^2} - \frac{hpI_0(qr)}{aq^2[qI_1(qR) + hI_0(qR)]} \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

Now apply the partial fraction rule. First

$$\frac{p}{aq^2} = \frac{p}{p + aK^2} = e^{-aK^2t} \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Next, the second term is, as before, an even function of q, and, therefore, a single-valued function of p. The numerator has no poles; the denominator has zeros when

$$q^2 = 0, \quad p = -aK^2 \quad . \quad . \quad . \quad (20),$$

and when $q = \pm in$, $p = -a(K^2 + n^2)$, where

$$nRJ_1(nR) = hRJ_0(nR) \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

as in 5 (11). Again only the values $+in$ of q need be considered. If we take

$$f(p) = hpI_0(qr), \quad F(p) = aq^2[qI_1(qR) + hI_0(qR)] \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

we have

$$\frac{f(0)}{F(0)} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (23),$$

$$f(p) = hp \quad \text{when } q = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (24),$$

and

$$= hpJ_0(nr) \quad \text{when } q = in \quad . \quad . \quad . \quad (25),$$

$$p\frac{d}{dp}F(p) = \frac{p}{2aq}\frac{d}{dq}F(p) = p[qI_1(qR) + hI_0(qR)] + \frac{1}{2}pq[(1 + hR)I_1(qR) + qRI_1'(qR)] \quad (26).$$

When $q = 0$, this is equal to ph; when q is equal to in, it is equal to

$$-\frac{1}{2}pn[(1 + hR)J_1(nR) + nRJ_1'(nR)] \quad . \quad . \quad . \quad (27).$$

Hence the partial fraction rule gives

$$\left.\begin{aligned} v &= e^{-aK^2t} - \left\{e^{-aK^2t} - 2\sum_n \frac{hpJ_0(nr)e^{-a(K^2+n^2)t}}{pn[(1 + hR)J_1(nR) + nRJ_1'(nR)]}\right\} \\ &= 2\sum_n \frac{hJ_0(nr)}{n[(1 + hR)J_1(nR) + nRJ_1'(nR)]} e^{-a(K^2+n^2)t} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (28).$$

The coefficients in this series are the same as those in 5. (17), and therefore, as in 5. (19) and (20),

$$v = 2\sum_n \frac{J_1(nR)J_0(nr)}{nR[J_0^2(nR) + J_1^2(nR)]} e^{-a(K^2+n^2)t} \quad . \quad . \quad . \quad (29),$$

$$= 2\sum_n \frac{nJ_1(nR)J_0(nr)}{R(n^2 + h^2)J_0^2(nR)} e^{-a(K^2+n^2)t} \quad . \quad . \quad . \quad (30).$$

Hence, if $\vartheta = \cos Kz$ initially,

$$\vartheta = \cos Kz\, e^{-aK^2t} \sum_n \frac{2J_1(nR)J_0(nr)}{nR[J_0^2(nR) + J_1^2(nR)]} e^{-an^2t} \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

If, then, initially

$$\vartheta = 1 = \sum_K \frac{2\sin Kl}{Kl + \sin Kl \cos Kl} \cos Kz \quad . \quad . \quad . \quad (32),$$

by the superposition of solutions we find

$$\vartheta = \sum_K \frac{2\sin Kl}{Kl + \sin Kl \cos Kl} \cos Kz\, e^{-aK^2t} \sum_n \frac{2J_1(nR)J_0(nr)e^{-an^2t}}{nR[J_0^2(nR) + J_1^2(nR)]} \quad . \quad . \quad (33).$$

The solution required, therefore, is the product of the series found in 4. (20) and 5. (21). The values of these series for small values of t have already been discussed, so that further discussion is unnecessary.

Zusammenfassung. Heavisides Operatoren-Methode wird angewandt, um die folgenden drei Probleme der Wärmeleitung zu behandeln: Bestimmung der Temperatur für jeden Zeitpunkt und an jedem Punkte 1) in einer unendlich ausgedehnten Platte von der Stärke $2l$, 2) in einem unendlich langen Kreiszylinder vom Radius R und 3) in einem endlichen Kreiszylinder von der Länge $2l$ und vom Radius R. Der Körper besitzt eine bestimmte konstante Anfangs-Temperatur (welche gleich 1 gesetzt wurde) und befindet sich innerhalb eines Mediums von niedrigerer Temperatur (welche gleich 0 gesetzt wurde), so daß die Oberfläche des Körpers Wärme ausstrahlt.

Die Operatoren-Methode läßt sich folgendermaßen zusammenfassen: Es genüge eine Variable v irgendeiner Differentialgleichung der Physik; man bringe alle Glieder der Gleichung auf die linke Seite des Gleichheitszeichens. Darunter schreibt man die nach folgenden Regeln aufgebaute „Hilfsgleichung". Bezeichnet t die Zeit, so ersetzt man jedesmal $\frac{\partial v}{\partial t}$ durch $p v$ und fügt auf der rechten Seite $p v_0$ hinzu, wenn v_0 den Anfangswert von v bezeichnet; ebenso ersetzt man $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ durch $p^2 v$ und fügt rechts $p^2 v_0 + p v_0'$ hinzu, wobei v_0' der Anfangswert von $\frac{\partial v}{\partial t}$ ist usf. Man löst nun die „Hilfsgleichung", indem man v als Funktion von p berechnet: $v = \varphi(p)$. Diese Lösung läßt sich nach verschiedenen Regeln und Methoden interpretieren, wie — vor allem in § 2 — ausgeführt wird.

Bezeichnet ϑ die Temperatur, a die Wärmeleitfähigkeit, h die relative Wärmeübergangszahl, t die Zeit, z den senkrechten Abstand der Oberfläche der Platte, gemessen von der Mitte der Platte, und setzt man $p = a q^2$, dann ist die Lösung von Problem 1) gegeben durch Gl. (10), § 4, S. 236. Nun ist eine der Regeln zur Interpretation einer derartigen Operatoren-Lösung, die „Partialbruchregel": Hat die Funktion $f(p)$ von p keine Pole, und ist $\frac{f(p)}{F(p)}$ eine eindeutige Funktion von p, so gilt:

$$\frac{f(p)}{F(p)} = \frac{f(0)}{F(0)} + \sum_K \frac{f(K)}{K F'(K)} e^{Kt}.$$

Dabei sind die K die Nullstellen von $F(p)$, die alle als einfach (und von Null verschieden) vorausgesetzt werden, der Strich in $F'(K)$ bezeichnet Differentiation, und die Summation ist zu erstrecken über alle Nullstellen von $F(p)$.

Die Anwendung dieser Regel zur Bestimmung von ϑ in 4. (10) S. 236 führt nun zu 4. (20), wobei die Summation über alle positiven Wurzeln von 4. (12) zu erstrecken ist. Diese übliche Form der Lösung ist ungeeignet, falls $\frac{at}{l^2}$ klein ist. Um auch für diesen Fall eine geeignete Lösung anzugeben, benutzt man 4. (10) wie in 4. (22), und nach der bekannten Interpretation von $h e^{-qx} / (h + q)$ ist ϑ dann annähernd durch 4. (26) gegeben, und zwar für kleine Werte von $\frac{at}{l^2}$.

Bezeichnet r den Abstand von der Zylinderachse, so ist die Operatoren-Lösung des zweiten Problems in 5. (9) S. 238 gegeben, wobei I wie üblich die Besselsche Funktion bezeichnet. Die Interpretation nach der „Partialbruchregel" gibt 5. (21) und (22), wobei die Summation sich über alle positiven Wurzeln von 5. (11) erstreckt. Ist $\frac{at}{r^2}$ klein, so erhält man, wenn man die asymptotischen Ausdrücke für die Funktionen I_0 und I_1 für große positive Werte des Arguments benutzt und Glied für Glied interpretiert, einen Näherungsausdruck für ϑ, der in 5. (30) gegeben wird. Dabei sind die D-Funktionen in 5. (26) bis 5. (29) kurz definiert. Wenn $\frac{at}{R^2}$ klein, aber $\frac{at}{r^2}$ groß ist, so benutzt man die asymptotischen Entwicklungen von $I_0(qR)$ und $I_1(qR)$ sowie die Reihenentwicklung für $I_0(qr)$; man findet dann, daß für Punkte auf oder sehr nahe der Achse ϑ näherungsweise durch 5. (32) gegeben ist.

Schließlich findet man die Lösung des 3. Problems, indem man ϑ gleichsetzt dem Produkt der Reihen 4. (20) und 5. (22), welche Lösungen des ersten bzw. zweiten Problems sind. Die Werte dieser Reihen für kleine Werte von t sind bereits diskutiert worden. 190

Über zwei theoretische Fragen der Nomographie und die Anwendung der Transformation von Nomogrammen zur Gewinnung von Fluchttafeln und Flächenschiebern.

Von *Eugen Lukács* in Wien.

Ein Nomogramm für eine vorgegebene Funktion kann man in verschiedener Weise konstruieren: Entweder nach dem Verfahren von M. d'Ocagne, das die Hilfsmittel der analytischen Geometrie verwendet, oder nach der darstellend-geometrischen Methode von Léon Lalanne, die auf der Anwendung der kotierten Projektion beruht.

In einer früheren Arbeit habe ich mit Hilfe der mehrdimensionalen darstellenden Geometrie Nomogramme von Gleichungen in vier Veränderlichen konstruiert und eine Klassifikation dieser Nomogramme vom Standpunkt der mehrdimensionalen darstellenden Geometrie erhalten[1]). Die darstellend geometrische Methode gibt jedoch noch zu einigen theoretischen Fragen Anlaß, die im ersten Teil der vorliegenden Arbeit besprochen werden sollen. Wir werden das „Existenzproblem" behandeln, nämlich die Frage, ob es zu einer vorgegebenen Funktion stets ein Nomogramm gibt; dabei werden wir auch untersuchen müssen, wie der d'Ocagnesche und der darstellend geometrische Nomogrammbegriff zusammenhängen. Im zweiten Teil werden wir uns mit der Transformation von cartesischen Tafeln befassen. Mit Hilfe der Polarität werden wir Fluchttafeln, mit Hilfe der Fußpunktverwandtschaft werden wir Flächenschieber erhalten.

1. Das Existenzproblem. In der oben erwähnten Arbeit haben wir Tafeln erhalten, die die gleiche Struktur haben wie d'Ocagnes „allgemeinste Nomogramme mit Linienkreuzung bei verzweigten Systemen". Durch den Gang unserer Konstruktionen können wir nicht nur eine räumliche Deutung für diese d'Ocagneschen Nomogramme erhalten; sondern auch eine theoretische Frage, das Existenzproblem, beantworten.

Schilling[2]) bemerkt zu dieser Frage folgendes: „Was Gleichungen mit zwei Variablen betrifft, so ist jeder Rechentafeltypus auf eine beliebige solche Gleichung anwendbar. . . . . . Auch für Gleichungen mit drei Variablen existieren gewisse Rechentafeltypen, die in jedem Falle anwendbar sind. Anders ist es im Falle einer Gleichung mit vier oder mehr Variablen. Hier ist vor allem erst die Möglichkeit nachzuweisen, daß die vorgelegte Gleichung überhaupt durch irgendeinen Rechentafeltypus darstellbar ist". Wenn man sich auf die von M. d'Ocagne betrachteten Tafeln beschränkt, kann man die Frage, ob es zu jeder Gleichung in vier Veränderlichen ein Nomogramm gibt, nur beantworten, indem man ein recht kompliziertes, bisher nur in Sonderfällen erledigtes Problem löst. Man kann nämlich nur dann behaupten, daß es zu einer vorgegebenen Funktion ein Nomogramm gibt, wenn man den Rechentafeltypus angeben kann, zu dem es gehört. So sagt ja auch d'Ocagne[3]): „Pour les équations à plus de trois variables, au contraire, il n'éxiste pas de méthode absolument générale. En rattachant une équation de cette sorte à tel ou tel type que l'on sait traduire par un abaque, c'est donc la possibilité même de sa représentation qu'on met en évidence." Wir haben jedoch bei unserer Darstellung auch allgemeinere Tafeln, als sie M. d'Ocagne betrachtet, erhalten und sind nun in der Lage, das Existenzproblem durch die räumliche Deutung der Fragestellung zu beantworten. Eine Gleichung $F(x, y, z, u) = 0$ in vier Veränderlichen bestimmt eine Überfläche Ψ; deren Bild liefern die Methoden der mehrdimensionalen darstellenden Geometrie. Das Bild dieser Überfläche kann aber auch als Nomogramm für die gegebene Gleichung verwendet werden. So sieht man also, daß es zu jeder Funktion in vier Veränderlichen ein Nomogramm gibt. Die Struktur des Nomogramms kann man allerdings erst dann angeben, nachdem man von der Überfläche, die die zu vertafelnde Funktion bestimmt, zugeordnete Normalrisse konstruiert hat. Für Funktionen mit beliebig vielen Veränderlichen lassen sich leicht ähnliche Betrachtungen anstellen.

2. Der Zusammenhang zwischen dem d'Ocagneschen nnd dem darstellend geometrischen Nomogrammbegriff. Zum Abschluß dieser allgemeinen Betrachtungen über cartesische Tafeln wollen wir noch das Problem beantworten, wie die mit Hilfe der darstellend geometrischen Methode erhaltenen Tafeltypen für Gleichungen in vier Veränderlichen mit den Nomogrammen d'Ocagnes für vier Variable zusammenhängen.

In Übereinstimmung mit der darstellend geometrischen Behandlungsweise der Nomographie können wir die cartesischen Bildtafeln folgendermaßen definieren.

---

[1]) Anwendung der mehrdimensionalen darstellenden Geometrie auf Nomographie. Diese Zeitschrift Bd. 10, Heft 5.

[2]) Schilling, Über die Nomographie von M. d'Ocagne. Berlin 1922. § 6. Theoretische Betrachtungen. S. 45.

[3]) M. d'Ocagne, Traité de Nomographie. Paris 1899. Chapitre VIII Etude des équations représentables au moyen d'un type d'abaque donné. No. 151, S. 416 und 417.

Eine cartesische Bildtafel einer Funktion $F(x, y, z, u) = 0$ ist eine in geeigneter Weise kotierte Projektion einer Überfläche Φ, die in einem einfachen — sei es analytischem, sei es konstruktivem — Zusammenhang mit der durch die Funktion $F(x, y, z, u) = 0$ dargestellten Überfläche Ψ steht.

Wenn wir sagen „in geeigneter Weise kotiert", so wollen wir damit ausdrücken, daß es nicht notwendig ist, die Koten den zu kotierenden Elementen — den Schichtenlinien — selbst beizufügen, sondern daß es gestattet ist, die Kotierung mit Hilfe geometrischer Inzidenzen auf die zu kotierenden Kurven zu übertragen. So geht man ja auch bei den „allgemeinsten Nomogrammen mit Linienkreuzung bei verzweigten Systemen" vor; eine direkte Kotierung wäre bei diesen Tafeln unmöglich, da ja jede Schichtenlinie Träger von einfach unendlich vielen doppelten Koten ist. Als Projektionsart verwendeten wir die orthogonale Projektion im vierdimensionalen euklidischen Raum, es ist selbstverständlich auch irgendeine andere Projektionsart zulässig, man wird allerdings zumeist die Orthogonalprojektion mit Vorteil verwenden. Bei besonderen Untersuchungen, etwa zum Nachweis, daß ein usueller Nomogrammtyp in den Bereich unserer Definition fällt, kann eine andere Projektionsart zweckentsprechend sein.

Im folgenden wollen wir ganz kurz die Definition des Nomogrammbegriffes, wie sie M. d'Ocagne in seinem Lehrbuch entwickelt[4]), besprechen.

Alle Nomogrammtypen, die M. d'Ocagne in seinem Werk behandelt, stellen sich dar als Sonderfälle eines abstrakten geometrischen Gebildes, des „allgemeinsten Nomogramms"[5]).

Man nimmt n ebene Blätter $\pi_1 \ldots. \pi_n$ an; das erste Blatt π_1 sei undurchsichtig, die übrigen $n-1$ seien durchsichtig. Durch drei einfache Berührungen[6])[7]) von Elementen — Punkten beziehungsweise Kurven — des ersten und zweiten Blattes verbindet man π_1 und π_2 und erhält so den Verband $[\pi_1, \pi_2]$. Diesem Verband fügt man mit Hilfe von drei weiteren einfachen Berührungen das Blatt π_3 hinzu und erhält so den Verband $[\pi_1, \pi_2, \pi_3]$. So fährt man fort, bis man nach $3n-3$ Berührungen alle n Blätter verbunden und so den Verband $[\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots. \pi_n]$ erhalten hat. Diese $3n-3$ Berührungen dienen zur Einstellung der n Blätter aufeinander und werden daher „Einstellberührungen" genannt. Nach vollzogener Einstellung nimmt man auf π_n ein viertes, bisher unbenütztes Element an, ebenso nimmt man auf einem der früheren Blätter ein unbenütztes Element an und zwar so, daß diese neu angenommenen Elemente in einfacher Berührung stehen. Dies ist jene Berührung, die bei jeder Ablesung einer graphischen Tafel, das heißt bei der Auflösung der zugrunde gelegten Funktion, verwendet wird; deshalb wird sie die Lösungsberührung genannt. Wir haben also insgesamt $3n-2$ Berührungen, und zwar eine Lösungsberührung und $3n-3$ Einstellberührungen verwendet. Jede Berührung von zwei Ebenen, z. B. von π_1 und π_2 — bzw. von einer Ebene und einem Teilverband von $[\pi_1, \pi_2, \ldots. \pi_n]$ — liefert uns eine Gleichung, in der erstens die Bezifferung der sich berührenden Elemente, zweitens drei Parameter, entsprechend den drei Freiheitsgraden der beiden Ebenen gegeneinander, vorkommen.

Jede auftretende Berührung liefert uns eine neue Gleichung, jede zu π_1 neu hinzutretende Ebene liefert uns drei neue Parameter. Wir haben $3n-2$ Berührungen und n Ebenen verwendet, dementsprechend erhalten wir nun auch $3n-2$ Gleichungen zwischen den Bezifferungsvariablen und $3n-3$ Parametern. Durch Elimination der $3n-3$ Parameter aus diesen $3n-2$ Gleichungen erhalten wir eine einzige Gleichung in den Bezifferungsvariablen. Dies ist die durch unser Nomogramm dargestellte Gleichung, die Zahl der Variablen kann, wie die obige Betrachtung zeigt, beliebig gewählt werden.

Und nun können wir in ganz einfacher Weise die früher gestellte Frage nach dem Zusammenhang unserer Definition und des d'Ocagneschen Nomogrammbegriffes beantworten. Jede Lösungsberührung ordnet nämlich einem Punkt eine mit ihm inzidente Kurve zu, die Gesamtheit aller Lösungsberührungen liefert uns also eine Punkt-Kurvenverwandtschaft besonderer Art. Die mehrdimensionale darstellende Geometrie lehrt nun, daß eine Überfläche in Orthogonalprojektion durch eine Punkt-Kurvenverwandtschaft dargestellt wird. Die Gesamtheit der Lösungsberührungen stellt also eine Überfläche dar; damit ist aber gezeigt, daß sich der d'Ocagnesche Nomogrammbegriff in unsere Definition einordnen läßt. Man sieht aber

[4]) Siehe diesbezüglich: M. d'Ocagne, Traité de Nomographie. Chap. 6. Théorie générale ..... No. 146 Abaques à plusieurs plans superposés und No. 147. Type d'abaques correspondant à un nombre donné de variables.

[5]) Der Begriff des „allgemeinsten Nomogramms nach M. d'Ocagne" wird auch in der Arbeit von P. Luckey, „Nomographische Darstellungsmöglichkeiten" entwickelt. Zeitschr. für angewandte Mathematik u. Mechanik Bd. 3/1.

[6]) Unter einer einfachen Berührung versteht d'Ocagne die Inzidenz eines Punktes und einer Kurve. Die doppelten Berührungen, das sind Inzidenz zweier Punkte und Tangierung zweier Kurven, lassen sich — wie leicht ersichtlich ist — immer auf zwei einfache Berührungen reduzieren. Bei einer Berührung gehören die sich berührenden Elemente stets verschiedenen Blättern des Verbandes an.

[7]) Die drei einfachen Berührungen, die zur Verbindung von je zwei Blättern notwendig sind, entsprechen den drei Freiheitsgraden.

auch, daß unsere Definition die umfassendere ist; haben wir doch auch Nomogramme erhalten, die sich in den d'Ocagneschen allgemeinsten Nomogrammbegriff nicht einfügen. Einen solchen Nomogrammtypus stellen die Verwandtschaftstafeln dar. Bei diesen sind ja der Punkt und die ihm zugeordnete Kurve im allgemeinen nicht inzident, also können diese Tafeln keine Nomogramme im Sinne d'Ocagnes sein.

Durch räumliche Betrachtungen war es uns möglich, den d'Ocagneschen Nomogrammbegriff zu erweitern. Alle d'Ocagneschen Nomogramme können wir auch nach der vorhin gegebenen Definition erhalten, haben jedoch auch Nomogramme konstruiert, die den Rahmen des d'Ocagneschen Nomogrammbegriffes überschreiten. Im Rahmen unseres erweiterten Nomogrammbegriffes konnten wir das Existenzproblem lösen, da wir ja ein Konstruktionsverfahren — nämlich das darstellend geometrische — erhalten haben, das unter Verwendung der Hilfsmittel der mehrdimensionalen darstellenden Geometrie zu jeder vorgelegten Funktion ein Nomogramm liefert. Es bleibt jedoch dahingestellt, ob für den d'Ocagneschen Nomogrammbegriff dieses Existenzproblem einer positiven Beantwortung zugeführt werden kann, da ja unsere Überlegungen auf Grund einer umfassenderen Definition durchgeführt wurden. Dieselben Überlegungen kann man auch für Funktionen mit beliebig vielen Veränderlichen anstellen.

Wir haben uns bisher ausschließlich mit der Theorie der cartesischen Tafeln befaßt und konnten daher einige wichtige Tafeltypen, wie z. B. die Fluchttafeln, nicht in den Kreis unserer Betrachtungen ziehen. Wir wollen jedoch keineswegs die Transformationstheorie der Nomogramme vollständig und ausführlich behandeln; die wäre auch gar nicht am Platz, da ja alle größeren Lehrbücher der Nomographie die Theorie der Transformation von Nomogrammen eingehend behandeln. Wir werden daher auch wichtige Transformationen von Nomogrammen, wie z. B. die logarithmischen, kollinearen und affinen Transformationen, nicht besprechen; es werden übrigens die soeben aufgezählten Transformationen auf Funktionen von vier und mehr Variablen in derselben Weise angewandt wie auf Funktionen von drei Veränderlichen. Wir wollen also im folgenden nur den früher erwähnten Mangel beheben und den Zusammenhang der cartesischen Tafeln mit anderen wichtigen Tafeltypen besprechen.

3. Die zulässigen Transformationen. Ein Nomogramm gestattet die Ablesung eines funktionalen Zusammenhanges durch die Konstatierung von Inzidenzen von Punkt und Kurvenscharen. Wenn man nach Anwendung einer Transformation der Zeichenebene wieder ein Nomogramm erhalten will, so muß man auch nach der Transformation die Inzidenzen konstatieren können. Wir können also alle Transformationen zulassen, die fast im ganzen Rechenbereich umkehrbar eindeutig und stetig sind, das heißt, daß es im ganzen Rechenbereich nur endlich viele Stellen gibt, für die die Transformation nur in einer — immer derselben — Richtung eindeutig und stetig ist. Ist die Transformation eine Punkt-Kurvenverwandtschaft, so stellt sie einen Übergang von einer Bildtafel in eine Fluchttafel her; Punkt-Punktverwandtschaften und Kurven-Kurvenverwandtschaften führen Bildtafeln in Bildtafeln und Fluchttafeln in Fluchttafeln über.

Zu unseren zulässigen Transformationen gehören alle topologischen Transformationen. Dejmek[8]) bemerkt dies für Bildtafeln, für Fluchttafeln kann er jedoch nur homographische Transformationen zulassen, da er nur gerade Linien als Ableselinien benutzt. Wir werden jedoch auch bei Fluchtlinientafeln krumme Ableselinien zulassen — und so auch Fluchtlinientafeln für sogenannte unverstreckbare Gleichungen erhalten.

4. Die Transformation durch die Polarität in bezug auf einen Kegelschnitt, insbesondere in bezug auf eine Parabel. Im folgenden wollen wir uns mit den zu den cartesischen Tafeln gehörigen Fluchttafeln befassen. Zu einer gegebenen Gleichung kann man eine Fluchttafel konstruieren indem man entweder diese Gleichung als Gleichung in Linienkoordinaten auffaßt oder eine cartesische Tafel der Gleichung einer polaren Transformation unterwirft. Es ist besonders günstig, diese Transformation an einer Parabel zu vollziehen, die die beiden Koordinatenachsen zu Tangenten und deren Winkelsymmetrale zur Achse hat; da man durch Transformation in bezug auf eine derartige Parabel Fluchttafeln in Parallelkoordinaten erhält[9]).

Wenn wir die cartesischen Tafeln mit Linienkreuzung bei verzweigten Systemen[10]) dieser Transformation unterwerfen, erhalten wir Fluchttafeln, die die Struktur der Abb. 1 haben.

[8]) J. Dejmek, Transformationen in nomographischer Darstellung. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik Band 7, Heft 2, S. 158/159.

[9]) Als erster benutzte die Polarität in bezug auf eine Parabel zur direkten Transformation von Bildtafeln in Fluchttafeln Theodor Schmid. Siehe sein Lehrbuch der darstellenden Geometrie, 2. Auflage, Band 2, § 61, S. 536, ferner S. 340 Anmerkung 11.

[10]) Siehe M. d'Ocagne, Calcul graphique et Nomographie. Paris 1809. S. 204, No. 57. Systemes ramifiés. Nomogrammes a lignes concourantes les plus généraux. — Siehe auch Abb. 91 a. a. O. — Die folgenden Tafeln der Abb. 1, 2, 3, 4, 5 sind die Fluchttafeln, die zu den cartesischen Tafeln gehören, die in meiner eingangs erwähnten Arbeit behandelt sind, und zwar als Abb. 2, 3, 3a, 4, 5.

In Abb. 1 sind die Kurven $\mathfrak{k}'$, $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{f}'$ aus der Koinzidenzlinie, den Kreuzriß bzw. den Grundrißordnern der zugehörigen cartesischen Tafel hervorgegangen. Zu einem Tripel (x_1, y_1, u_1) erhalten wir — wie die Figur zeigt — den Wert z_1 in folgender Weise. Die Verbindungsgerade der mit x_1 und y_1 kotierten Punkte berührt eine Kurve f_1' der Schar $\mathfrak{f}'$. Die gemeinsame Tangente von f_1' und $\mathfrak{k}'$ wird von einer Kurve s_1' der Schar $\mathfrak{s}'$ berührt. Die Tangenten aus dem Punkt u_1 der u-Skala schneiden aus der z-Skala diejenigen Punkte z_1 aus, die durch die vertafelte Funktion dem Tripel (x_1, y_1, u_1) zugeordnet werden.

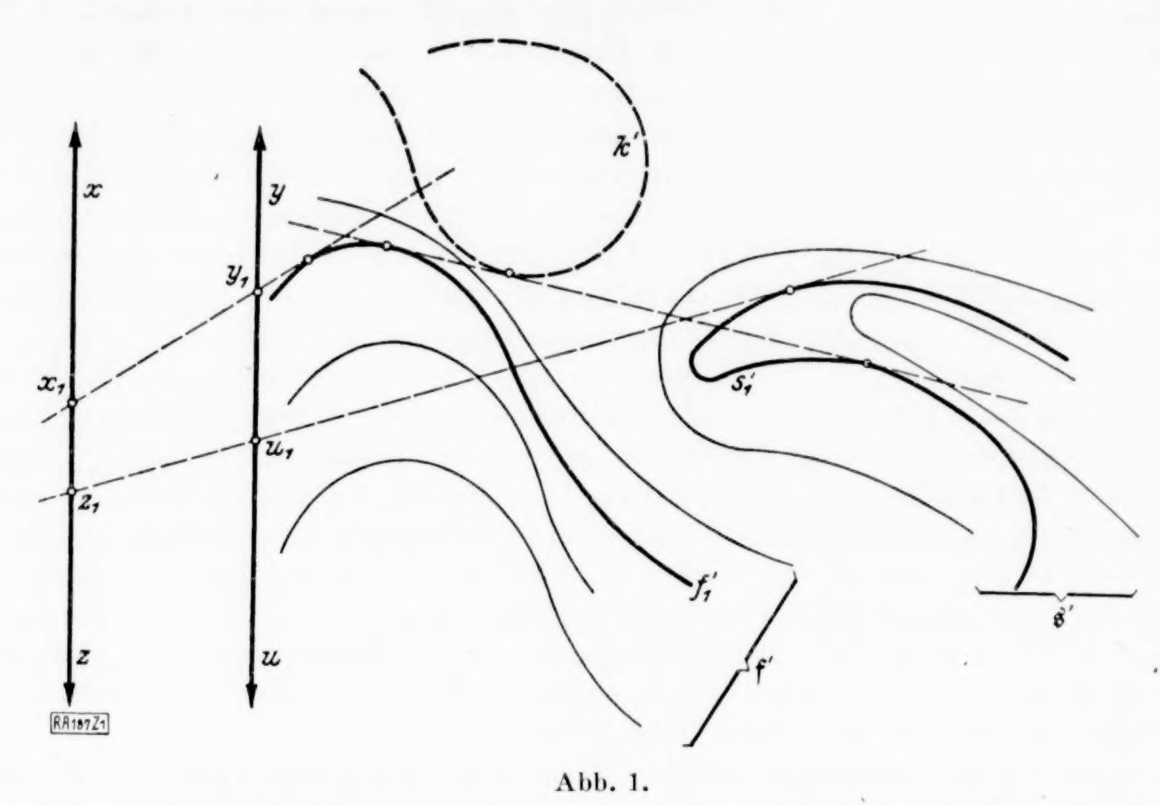


Abb. 1.

Wesentliche Vereinfachungen kann man bei diesen Tafeln erzielen, wenn die Schichtenlinien gerade Linien sind, insbesondere wenn die vorgelegte Gleichung linear ist. In diesem letzteren Falle reduzieren sich nämlich die Kurvenscharen $\mathfrak{f}'$ und $\mathfrak{s}'$ auf zwei ähnliche Punktreihen, deren Ähnlichkeitszentrum der Pol K' der Koinzidenzlinie ist. Die Träger dieser Punktreihen sind zu den beiden Trägern der x und y — bzw. der mit diesen kollokalen z und u — Skala parallel. Die Kurve $\mathfrak{k}'$ reduziert sich auf den Punkt K' und wir erhalten eine Fluchttafel, die die Struktur der Abb. 2 zeigt. Die Fluchttafel der Abb. 2 ist nur ein Sonderfall jener Fluchttafeln, die man aus dem Typus der Tafel Abb. 1 erhält, wenn man voraussetzt, daß sowohl die zur Grundrißebene als auch die zur Kreuzrißebene parallelen Schichtenlinien Gerade sind und daß jede dieser Geradenscharen eine Kurve einhüllt. Daraus folgt räumlich, daß die vorgelegte Gleichung eine „planare Überfläche" bestimmt, die so gelegen ist, daß sie in beiden Rissen Umrisse hat. Dann treten statt der beiden Kurvenscharen $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{f}'$ krummlinige Zapfenlinien auf. Die Tafel der Abb. 3 zeigt uns ein Anwendungsbeispiel für den Fall, den Abb. 2 nur schematisch darstellt. Es ist dies die Formel für die Wassergeschwindigkeit in Flüssen $\overline{v} = c\sqrt{R \cdot J}$ [11]).

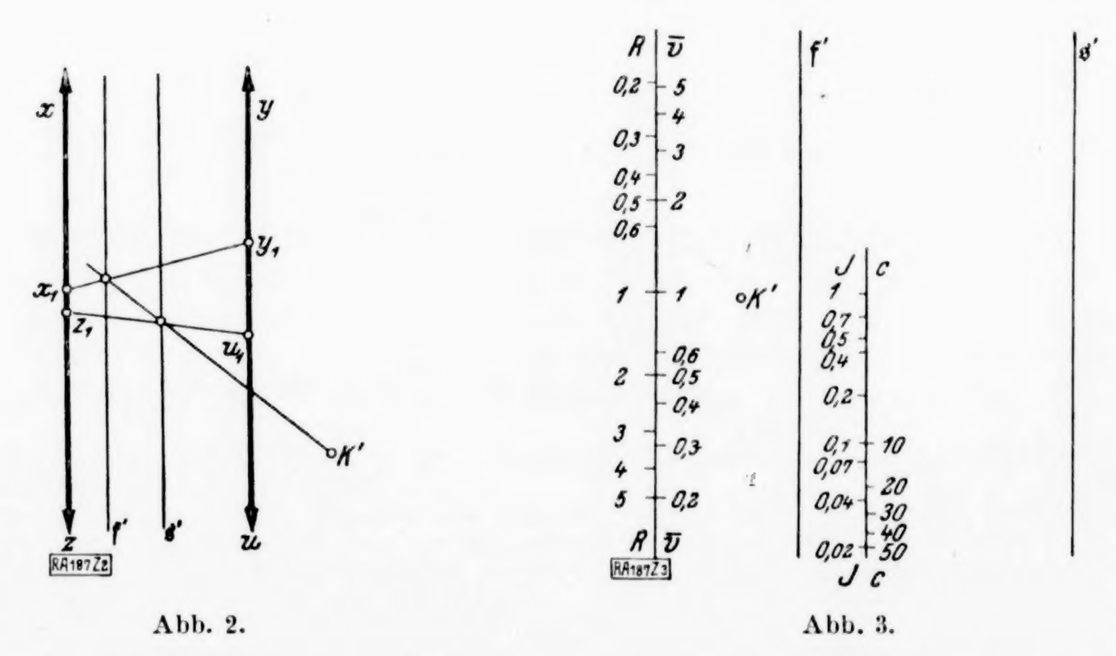


Abb. 2. Abb. 3.

[11]) Siehe Lacmann: Herstellung gezeichneter Rechentafeln. Berlin 1923. $\overline{v}$ bedeutet die Geschwindigkeit, J das Gefälle, R den hydraulischen Halbmesser, c ist ein variabler, im einzelnen Fall der Verwendung bekannter Koeffizient. Ein leicht ersichtliches Ablesebeispiel ist $(c = 10,\ R = 0{,}4,\ J = 0{,}4) \rightarrow \overline{v} = 4$.

Wir wollen nun, wieder durch Polarisieren an einer Parabel, zu den Hüllkurventafeln Fluchttafeln konstruieren. Die Struktur dieser Tafeln zeigt die Abb. 4. Aus der Ordnungskurve u_y wird, falls sie der scheinbare Umriß der durch die Gleichung dargestellten Oberfläche ist, die Klassenkurve u'_y der Abb. 4. Aus den Ordnungskurven $u_x(y)$, den Einhüllenden der Schichtenlinien werden die Klassenkurven $u_x'(y)$. Falls u_y nicht der Umriß der Überfläche sondern der Ort der Singularitäten der Schichtenlinien ist, ist u_y' der Ort der zu diesen dualen Singularitäten. Wie bei den zugehörigen Bildtafeln, ist auch hier u_y' Träger der y-Skala, $u_x'(y)$ der x-Skala, wobei wieder die Berührungspunkte kotiert sind. Beispiele für derartige Fluchttafeln sind verschiedene Tafeln zur Auflösung der vollständigen kubischen Gleichung $x^3+yx^2+zx+u=0$. Da im folgenden zwei verschiedene cartesische Tafeln zur Auflösung der vollständigen kubischen Gleichung Transformationen unterworfen werden, ist es von Vorteil, eine kleine Übersicht über jene verstreckbaren Nomogramme für die vollständige kubische Gleichung zu geben, die wir mit Hilfe der mehrdimensionalen darstellenden Geometrie leicht erhalten können. Kubische Gleichungen treten mitunter auch in der Praxis auf, technische Anwendungsmöglichkeiten der Tafeln zur Auflösung der vollständigen kubischen Gleichung erwähnt d'Ocagne im traité de nomographie Seite 334.

Wenn wir die zu-Ebene oder die yu-Ebene oder die yz-Ebene als Bildebene wählen, erhalten wir Nomogramme zur Auflösung der vollständigen kubischen Gleichung, für die x und y, bzw. x und z, bzw. x und u die beiden Parameter der zweiparametrigen Schar der Schichtenlinien sind. Jeder dieser drei Fälle liefert uns zwei verschiedene, verstreckbare, cartesische Tafeln. Wenn man nämlich für diese drei Fälle die Hüllkurventafeln konstruiert, so ist entweder x der Kurvenparameter der Einhüllenden der Schichtenlinien und y — bzw. z oder u — der Scharparameter der Schichtenlinien. Falls aber x der Parameter der Kurvenschar der Einhüllenden der Schichtenlinien ist — diesen nannten wir den Scharparameter —, muß y (bzw. in den beiden anderen Fällen z oder u) der Kurvenparameter einer jeden Einhüllenden von Schichtenlinien sein.

Falls wir x zum Scharparameter wählen, müssen wir die Hüllkurven, d. i. die Einhüllenden der Schichtenlinien, für konstantes x und variables y (bzw. z oder u) konstruieren. In diesen drei Fällen ordnen sich die Schichtenlinien in einer einparametrigen Schar von Parallelstrahlbüscheln an. Die Kurven $u_y(x)$ — bzw. $u_z(x)$ oder $u_u(x)$ — werden zu den Scheiteln dieser Parallelstrahlbüschel, u_x wird zur unendlich fernen Geraden der Bildebene. In diesem Fall ist die Tafel unpraktisch kotiert; eine Änderung der Art der Kotierung — z. B. Verbinden der Punkte gleicher y (bzw. z oder u) Kote — führt auf die Tafeln, bei denen x Kurvenparameter und y (bzw. z oder u) Scharparameter sind.

Über diese drei Tafeln orientiert die folgende Tabelle.

$$x^3+yx^2+zx+u=0$$

	I.	II.	III.
Koordinaten in der Bildebene	z, u	y, u	y, z
Scharparameter	y	z	u
Kurvenparameter	x	x	x
Die Einhüllenden der Schichtenlinien in Parameterdarstellung	$z=-3x^2-2yx$ $u=2x^3+yx^2$	$y=\frac{-z-3x^2}{2x}$ $u=\frac{x^3-zx}{2}$	$y=\frac{u-2x^3}{x^2}$ $z=\frac{x^3-2u}{x}$
Einhüllende der Schichtenlinien in impliziter Darstellung		$4z^3+27u^2-y^2z^2-18uyz+4uy^3=0$	
Ordnung dieser Kurven	3	4	4
Klasse dieser Kurven	3	3	3
Geschlecht	0	0	0

Es soll nun eine Fluchttafel zu der mit I. bezeichneten Tafel konstruiert werden. Wenn wir an einer Parabel mit dem Parameter p polarisieren, werden wir die z und u Werte an zwei parallelen Skalen ablesen können, die voneinander den Abstand $2p$ haben. Wenn Z

und U die Koordinaten der Zeichenebene sind, wird der Punkt $Z=-p$, $U=+p-c_1\sqrt{2}$ die Kote $z=c_1$; der Punkt $Z=p$, $U=p+c_2\sqrt{2}$ die Kote $u=c_2$ tragen. Die Strahlen des Parallelstrahlbüschels, das zu den Trägern der z- und der u-Skala parallel ist, sind die Träger der x-Koten; daher bringt man mit Vorteil die x-Koten an einer Normalen zu den Strahlen dieses Büschels an. Der Strahl $Z=p\dfrac{1+x}{1-x}$ trägt dann die Kote x. Aus den Einhüllenden der Schichtenlinien, die Kurven dritter Ordnung und dritter Klasse waren, gehen wieder Kurven dritter Ordnung und dritter Klasse hervor. Diese Kurven besitzen immer einen Rückkehrpunkt und eine Wendetangente. Während bei der cartesischen Bildtafel der Rückkehrpunkt im Endlichen gelegen ist und der Wendepunkt im Unendlichen lag, liegt für die Kurven der Fluchttafeln der Wendepunkt im Endlichen und der Rückkehrpunkt im Unendlichen. Den Hüllkurven der Bildtafel entsprechen also Kurven, die, wie eine kurze Rechnung zeigt, die Parameterdarstellung $Z=p\dfrac{1+x}{1-x}$; $U=\dfrac{x^2(x+y)}{x-1}\sqrt{2}+p$ haben. Diese Tafel zeigt Abb. 5, es ist auch ein Ablesebeispiel gezeichnet. Fluchttafeln, die zu cartesischen Tafeln der obigen Tabelle gehören, finden sich in verschiedenen Lehrbüchern. Die Fluchttafel zu der unter I. angeführten cartesischen Tafel — d. i. Abb. 5 — kommt bereits bei M. d'Ocagne vor[12])[13]). Die Fluchttafel zur Tafel III finden wir in dem Enzyklopädieartikel von R. Mehmke[14]).

Für die allgemeinsten cartesischen Tafeln, die Verwandtschaftstafeln, können wir keine einfachen Fluchttafeln erhalten; die Punkt-Ordnungskurvenverwandtschaft geht ja in eine Gerade-Klassenkurvenverwandtschaft über, so daß die Fluchttafel im allgemeinen noch komplizierter wird als die Bildtafel.

Im folgenden wollen wir eine quadratische Transformation betrachten, die die cartesischen Tafeln in Flächenschieber überführt[15]).

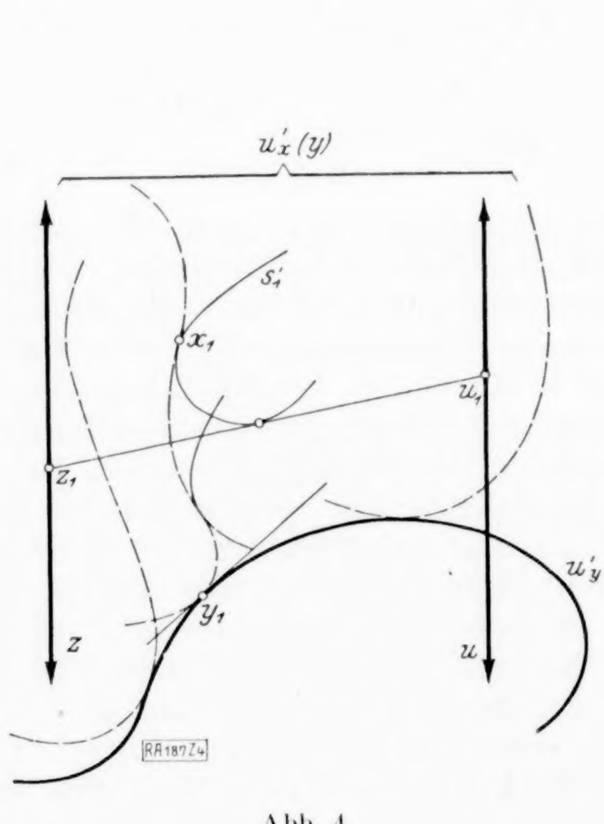


Abb. 4.

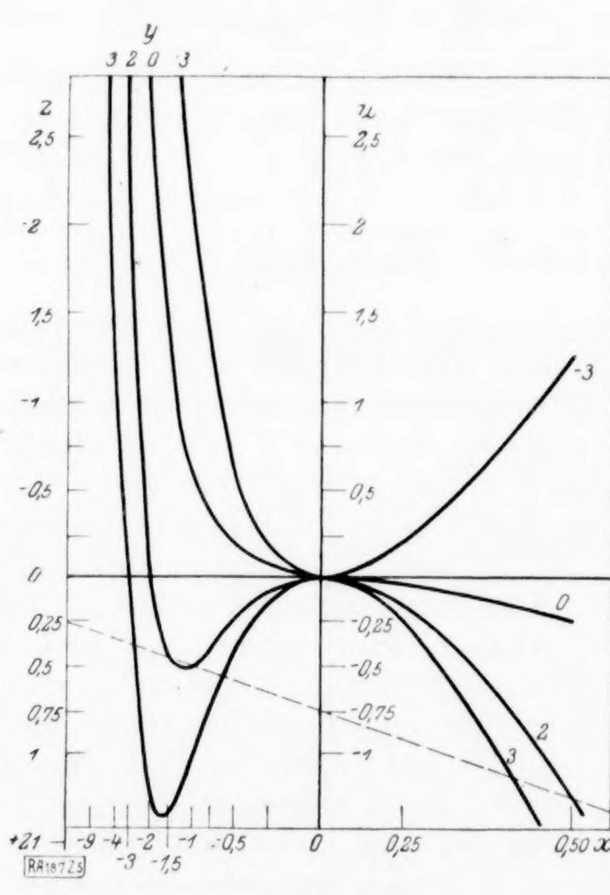


Abb. 5.

5. Die Transformation mit Hilfe der Fußpunktverwandtschaft. Die Fußpunktverwandtschaft ist eine quadratische Transformation, und zwar eine Punkt-Geradenverwandtschaft, die jeder Geraden g der Ebene den Fußpunkt G des Lotes aus einem Punkte O, ferner jedem Punkte P die Gerade p durch P senkrecht auf $\overline{OP}$ zuordnet (siehe Abb. 6). Analytisch drückt sich dies folgendermaßen aus. Als Koordinatenursprung wurde der Punkt O gewählt. Der

[12]) Traité de nomographie. S. 334, Abb. 149. Dieselbe Tafel findet man auch bei Werkmeister, Das Entwerfen von graphischen Rechentafeln. S. 178, Abb. 148.

[13]) Die Tafel gestattet nur das Ablesen der reellen Wurzeln, selbstverständlich kann man leicht ein Zusatznomogramm konstruieren, das die Bestimmung der komplexen Wurzeln gestattet.

[14]) Enzyklopädie der Math. Wissenschaften. I/2F., S. 1044. Dieselbe Tafel kommt bei Werkmeister vor. A. a. O. S. 180, Abb. 149.

Eingehend werden die Tafeln von d'Ocagne und Mehmke untersucht in einer seit Drucklegung dieser Arbeit erschienenen Abhandlung von F. W. Palm, Geometrische Untersuchung von graphischen Tafeln zur Auflösung der vollständigen kubischen Gleichungen. Sitzungsberichte der Wiener Akad. d. Wissensch. Abt. IIa, Bd. 190, Heft 7 (1931).

[15]) Siehe Luckey, Über Flächenschieber. Zeitschrift für angewandte Mathematik u. Mechanik Bd. 5, Heft 3.

Geraden $g(a,b)$, die die Gleichung $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ hat, ist der Punkt $G(x_0, y_0)$ zugeordnet, wobei $x_0=\frac{a\,b^2}{a^2+b^2}$ und $y_0=\frac{a^2\,b}{a^2+b^2}$ ist. Dem Punkt $P(x_0, y_0)$ wird die Gerade $p(a,b)$ — die die Gleichung $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ hat — zugeordnet, dabei ist $a=\frac{x_0^2+y_0^2}{x_0}$, $b=\frac{x_0^2+y_0^2}{y_0}$. Eine einfache Überlegung lehrt, daß diese Verwandtschaft in der ganzen Ebene mit Ausnahme der Hauptpunkte und Hauptgeraden umkehrbar eindeutig ist. Die Hauptpunkte sind der Punkt O und die absoluten Kreispunkte J_∞, K_∞; die Hauptgeraden sind die uneigentliche Gerade o_∞ und die isotropen Geraden i_∞ und k_∞ des Punktes O. Bei Anwendung der Fußpunktverwandtschaft auf Nomogramme ist es vorteilhaft, wenn man die Kurven als Klassenkurven betrachtet. Aus Abb. 6 sieht man auch, wie man zum Punkte T der Linie l jenen Punkt T' finden kann, der der Tangente t in T entspricht. Der Punkt T' liegt nämlich auf einem Kreis, dessen Durchmesser $\overline{OT}$ ist.

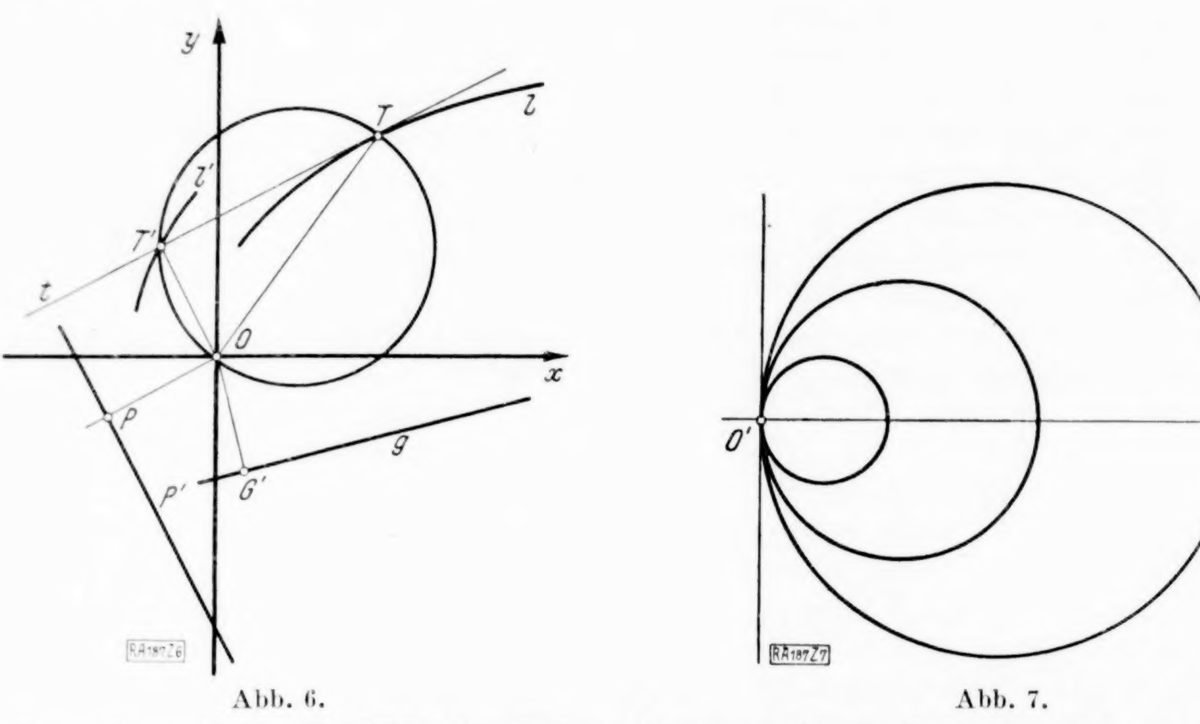


Abb. 6. Abb. 7.

Die Transformation mit Hilfe der Fußpunktverwandtschaft eignet sich vor allem für die verstreckbaren Nomogramme, d. h. die Nomogramme mit geraden Schichtenlinien. Einer jeden einparametrigen Geradenschar $\mathfrak{f}$ entspricht eine Punktreihe auf einer Kurve $\mathfrak{f}'$. Einem Strahlbüschel mit dem Scheitel P entspricht ein Kreis mit dem Durchmesser $\overline{OP}$. Wenn wir jenen Punkt von $\mathfrak{f}'$ finden wollen, der einer Geraden von $\mathfrak{f}$, die durch P geht, entspricht, müssen wir $\mathfrak{f}'$ mit dem Kreis, der $\overline{OP}$ zum Durchmesser hat, schneiden. Zur Ablesung dienen also bei den durch die Fußpunktverwandtschaft transformierten Nomogrammen die Kreise, die durch den Ursprung O gehen. Es ist vorteilhaft, diese Kreise im Nomogramm nicht einzuzeichnen, sondern eine transparente, bewegliche Ablesevorrichtung zu verwenden. Die Ablesevorrichtung besteht aus einem durchsichtigen Blatt, auf dem alle Kreise, die eine Gerade in einem Punkte O' berühren, gezeichnet sind. Es genügt dabei, nur solche Kreise zu zeichnen, die auf derselben Seite der Geraden liegen. Dieses transparente Blatt — vgl. Abb. 7 — wird so mit dem Nomogramm verbunden, daß O mit O' zusammenfällt und die Ablesevorrichtung um $O=O'$ frei drehbar ist. So wurde unsere ursprüngliche cartesische Tafel durch die Fußpunktverwandtschaft in einen Flächenschieber mit einem Freiheitsgrad transformiert.

Als Beispiel für die Transformation durch die Fußpunktverwandtschaft wollen wir einen Flächenschieber zur Auflösung kubischer Gleichungen konstruieren. Abb. 8. Als Ausgangstafel werden wir dabei die cartesische Tafel, die in unserer Tabelle mit III. bezeichnet ist, wählen. Es wird also u der Scharparameter und x der Kurvenparameter sein[16]).

Es sei $F(x,y,z,u)=x^3+y\,x^2+z\,x+u=0$ die gegebene Funktion. Bei konstantem u und variablem Parameter x bilden die Schichtenlinien eine einparametrige Geradenschar, deren Geraden die Gleichung $z=-x\,y-\left(x^2+\frac{u}{x}\right)$ haben. Die Transformation durch die Fußpunktverwandtschaft ordnet dieser Geraden den Punkt (ζ,η) zu, wobei $\eta=-\frac{x^3+u}{x^2+1}$, $\zeta=-\frac{x^3+u}{x^3+x}$ ist. Daraus erhalten wir durch Elimination des Parameters x die Gleichung jener Kurve,

[16]) Bei dieser Wahl der Parameter bilden wir unsere kubische Überfläche nicht wie bisher auf die Grundriß- und Kreuzrißebene, sondern auf die Querriß- und Aufrißebene ab.

die in der Fußpunktverwandtschaft der oben erwähnten Geradenschar entspricht. Die Gleichung dieser Kurve ist $y^3 + uz^3 + y^3 z + z^3 y = 0$. Bei variablem Parameter u bilden alle diese Kurven eine einparamentrige Kurvenschar $\mathfrak{S}$. Die Eigenschaften dieser Kurven kann man entweder durch Rechnung aus der Kurvengleichung ermitteln oder durch geometrische Überlegungen aus den Eigenschaften der Kurven der Tafel III herleiten. Die Kurven $y = \frac{u - 2x^3}{x^2}$, $z = \frac{x^3 - 2u}{x}$ der Tafel III — u ist Scharparameter, x Kurvenparameter — sind Kurven 4. Ordnung 3. Klasse vom Geschlecht 0 und besitzen als solche eine Doppeltangente d. Diese ist, wie man leicht sieht, allen Kurven der Schar gemeinsam, und zwar ist es die uneigentliche Gerade der Zeichenebene. Die Fußpunktverwandtschaft führt bekanntlich eine Kurve dritter Klasse in eine Kurve sechster Ordnung über, die die Hauptpunkte O, J_∞, K_∞, der Verwandtschaft zu dreifachen Punkten hat. Wenn die uneigentliche Gerade der Zeichenebene Doppeltangente der Kurve dritter Klasse ist, muß die durch die Transformation erhaltene Kurve sechster Ordnung zerfallen. Und zwar zerfällt diese Kurve dann in eine Kurve vierter Ordnung und in die doppelt zu zählende uneigentliche Gerade. Da die Kurve sechster Ordnung die Hauptpunkte zu dreifachen Punkten hat, muß die Kurve vierter Ordnung die absoluten Kreispunkte zu einfachen Punkten haben; im Ursprung wird die Kurve vierter Ordnung einen dreifachen Punkt haben, in unserem Fall mit einem Paar von konjugiert imaginären Tangenten. Daraus folgt, daß die Kreise durch den Hauptpunkt O unsere Kurven vierter Ordnung in höchstens drei reellen, vom Hauptpunkt verschiedenen, Punkten schneiden. Den Kurven der Schar $\mathfrak{S}$ fügen wir den zugehörigen u-Wert als Kote hinzu. Bei konstantem x und variablem u bilden die Schichtenlinien ein Parallelstrahlbüschel, dessen Gleichung lautet $z = -yx - \left(x^2 + \frac{u}{x}\right)$. Durch die Fußpunktverwandtschaft wird dieses Parallelstrahlbüschel in die Punktreihe $z = \frac{1}{x} y$ übergeführt. Diese Gerade wird mit x kotiert, die Kote wollen wir an einem beliebigen Kreis um den Hauptpunkt O anbringen. Als Ablesevorrichtung dient wiederum ein parabolisches Kreisbüschel. Die so erhaltene Tafel ist symmetrisch in bezug auf die z-Achse, da aus $u = -\bar{u}$, $y = -\bar{y}$, $x = -\bar{x}$ folgt $z = \bar{z}$. In Abb. 8 sind auch drei Beispiele eingezeichnet, und zwar die Auflösung der folgenden Gleichungen: 1.) $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$ (Wurzeln $+2$, $+4$, -1), 2.) $x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x + 1 = 0$ $\left(\text{eine reelle Wurzel } -\frac{3}{2}\right)$, 3.) $x^3 + 3x^2 - \frac{15}{4}x - 1 = 0$ $\left(\text{Wurzeln } +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -4\right)$. Die verschiedenen Stellungen der Ablesevorrichtung wurden dadurch angedeutet, daß die drei zu den obigen Beispielen gehörigen Kreise in der Abbildung 8 strichliert gezeichnet sind.

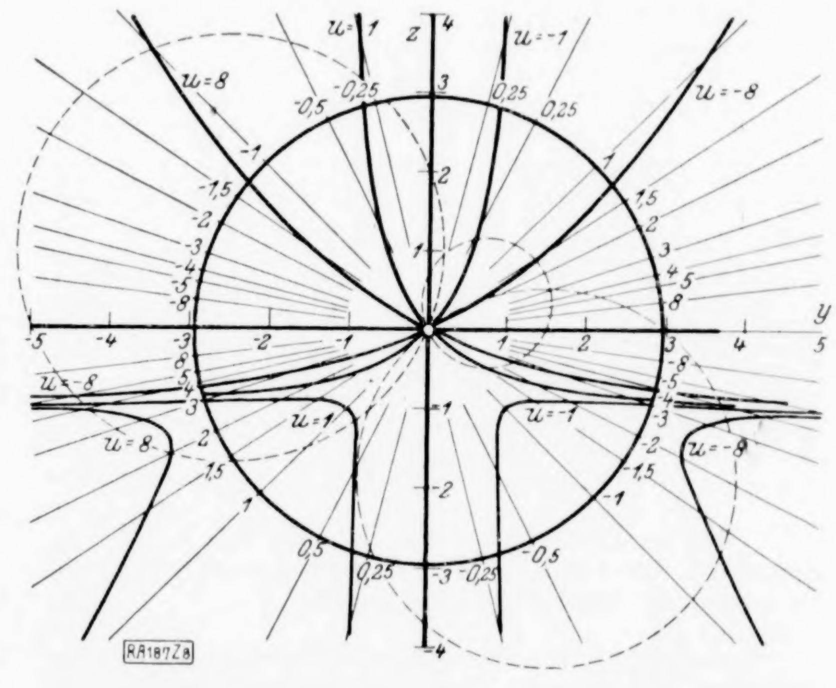


Abb. 8.

Bei unseren nomographischen Betrachtungen sind wir von der räumlichen Deutung der vorgelegten Funktion $F(x, y, z, u) = 0$ ausgegangen und haben die cartesischen Tafeln als kotierte Orthogonalprojektion der durch $F(x, y, z, u) = 0$ dargestellten Überfläche erhalten. Wir haben gezeigt, daß es zu jeder Funktion eine cartesische Tafel gibt und daß der darstellend geometrische Nomogrammbegriff eine Erweiterung des d'Ocagneschen Nomogrammbegriffes ist. Im zweiten Teil unserer Betrachtungen haben wir einiges aus der Theorie der Transformation von Nomogrammen besprochen. Auf diese Weise haben wir die wichtigsten usuellen Nomogrammtypen erhalten; einige Typen haben wir allerdings nicht in den Kreis unserer Überlegungen ziehen können[17]), so z. B. die Dreieckstafeln und die Gercevanoffschen Stechzirkelnomogramme, ferner einige Typen, die auf elementargeometrischen Sätzen beruhen. Wenn man auch diese Typen in unser Schema einordnen will, muß man entweder andere Projektionsmethoden benutzen oder man muß versuchen, diese Typen in einen anderen, bereits aus einer cartesischen Tafel ableitbaren Typus zu transformieren[18]). 187

[17]) Stechzirkelnomogramme: Luckey, Nomographische Darstellungsmöglichkeiten. Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech. Bd. 3, H. 1. — Dreieckstafeln: Lacmann, Die Herstellung gezeichneter Rechentafeln. S. 82.

[18]) So kann man z. B. die Dreieckstafeln bei Verwendung einer isometrischen Projektion räumlich deuten.

KLEINE MITTEILUNGEN

Die Verschiebungsellipsoide elastischer Körper – Konjugierte Ellipsoide – Die erzeugenden vektoriellen Dyaden. — Aus dem Gesetze von Betti (Theorie der Formänderungsarbeit) läßt sich eine bemerkenswerte Eigenschaft des elastischen isotropen Körpers ableiten, welche ihren Ausdruck in zwei unten angegebenen Sätzen findet.

Der Zweckmäßigkeit und Übersichtlichkeit halber wird im nachstehenden die vektorielle Symbolik benutzt. Außer der bequemen und zeitersparenden Formulierung muß man auch anerkennen, daß die Vektoranalysis das geeignetste Mittel für die stereoskopische Darstellung der Elastizitätstheorie bildet. Im übrigen läßt sich jede vektorielle Gleichung in dreidimensionigem Koordinatensystem durch drei skalare Gleichungen auf einfache Weise ausdrücken[1].

Im folgenden werden die vektoriellen Größen mit deutschen und die skalaren mit lateinischen Buchstaben gekennzeichnet.

Das Gesetz von Betti liefert bekanntlich:

$$\Sigma\, \mathfrak{P}_m\, \mathfrak{s}_{m\,n} = \Sigma\, \mathfrak{P}_n\, \mathfrak{s}_{n\,m} \quad . \; . \; . \; . \quad (1),$$

wobei $\mathfrak{s}_{m\,n}$ den Weg irgendeiner Belastung $\mathfrak{P}_m$ darstellt für den Fall, daß auf einen elastischen isotropen Körper nur die Belastung $\mathfrak{P}_n$ wirkt, während $\mathfrak{s}_{n\,m}$ den Weg irgendeiner Belastung $\mathfrak{P}_n$ infolge ausschließlicher Wirkung der Belastung $\mathfrak{P}_m$ bezeichnet.

Man betrachte drei nichtkomplanare Kräfte $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{U}_3$ von der Intensität „eins" und von beliebiger Richtung im Punkte m des Körpers wirkend, welche die entsprechenden Verschiebungen $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$ in irgendeinem anderen Punkte n des Körpers hervorrufen; ferner sei $\mathfrak{V}$ eine beliebig gerichtete Einheitskraft im Punkte n und gesucht wird die der Kraft $\mathfrak{V}$ entsprechende Verschiebung $\mathfrak{u}$ des Punktes m.

Durch Kombination der Belastung $\mathfrak{V}$ mit jeder der Belastungen $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{U}_3$ und durch dreimalige Anwendung der Gl. (1) erhalten wir:

$$\mathfrak{U}_1\,\mathfrak{u} = \mathfrak{V}\,\mathfrak{v}_1 \qquad \mathfrak{U}_2\,\mathfrak{u} = \mathfrak{V}\,\mathfrak{v}_2 \qquad \mathfrak{U}_3\,\mathfrak{u} = \mathfrak{V}\,\mathfrak{v}_3 \quad . \quad (2).$$

Es ist selbstverständlich, daß das Symbol Σ der Gl. (1) sich nur auf ein Produkt der Form $\mathfrak{P}\mathfrak{s}$ für jedes Glied der Gl. (2) erstreckt.

Da nun aber $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{U}_3$ Einheitsvektoren sind, so bilden die linken Glieder der Gl. (2) und die, ihnen gleiche, rechte Glieder die Projektionen des Vektors $\mathfrak{u}$ auf die Richtungen $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{U}_3$.

Somit[2]:

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{U}_1 \cdot \mathfrak{v}_1\, \mathfrak{V} + \mathfrak{U}_2 \cdot \mathfrak{v}_2\, \mathfrak{V} + \mathfrak{U}_3 \cdot \mathfrak{v}_3\, \mathfrak{V} \quad . \; . \quad (3).$$

In dieser Gleichung sind $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{U}_3$, $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$ gegebene Vektoren, $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{V}$ zwei beliebige, doch voneinander abhängige Vektoren.

Unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{U}_3$, wie auch $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$ nichtkomplanare Vektoren sind, so bildet die Gl. (3) eine homogene lineare Vektorfunktion und speziell eine komplette Dyade (Dyadentripel[3]):

$$\mathfrak{u} = (\mathfrak{U}_1 ; \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{U}_2 ; \mathfrak{v}_2 + \mathfrak{U}_3 ; \mathfrak{v}_3)\, \mathfrak{V} = \Phi\, \mathfrak{V} \quad . \; . \quad (4).$$

In der Gl. (4) ist der veränderliche Vektor $\mathfrak{V}$ ein Einheitsvektor; deshalb folgt aus den bekannten Eigenschaften der Dyaden:

1. Wenn der Vektor $\mathfrak{V}$ alle möglichen Richtungen um den Punkt n nimmt, bewegt sich die Spitze der Verschiebung $\mathfrak{u}$ des Punktes m auf die Fläche eines Ellipsoides.

2. Das rechtwinklige System der drei Haupthalbachsen dieses Ellipsoides entspricht drei bestimmten, rechtwinklig aufeinander stehenden Richtungen des Vektors $\mathfrak{V}$.

Wenn wir mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die Haupthalbachse des Ellipsoides und mit $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ die entsprechenden Werte von $\mathfrak{V}$ bezeichnen, so können wir die Dyade (4) in die Normalform bringen:

$$\boxed{\mathfrak{u} = (\mathfrak{a} ; \mathfrak{i} + \mathfrak{b} ; \mathfrak{j} + \mathfrak{c} ; \mathfrak{k})\, \mathfrak{V} = \Phi\, \mathfrak{V}} \quad . \; . \quad (5),$$

wobei sowohl die Antezedenten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, als auch die Konsequenten $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, je ein orthogonales Tripel bilden. Was schließlich die Umwandlung der Dyade (4) in die Normalform (5) anbetrifft, so verweisen wir auf die in der Fußnote[2]) erwähnten Werke.

Aus obigem geht hervor:

Erster Satz: Wirkt in einem bestimmten Punkte eines ruhenden elastischen isotropen Körpers nach allen möglichen Richtungen eine dem Absolutbetrag nach konstante Kraft, so daß sich ihre Vektorspitze auf einer Kugelfläche bewegt, so bewegt sich jeder Punkt des Körpers auf der Fläche eines Ellipsoides **(des Verschiebungsellipsoides),** dessen Mittelpunkt mit der ursprünglichen Lage jedes Punktes zusammenfällt. Die Verschiebung des beliebigen Punktes ergibt sich als Funktion der Kraftrichtung $\mathfrak{V}$ aus einer kompletten Dyade **(der Verschiebungs- erzeugender Dyade),** die sich in der Normalform:

$$\mathfrak{u} = (\mathfrak{a} ; \mathfrak{i} + \mathfrak{b} ; \mathfrak{j} + \mathfrak{c} ; \mathfrak{k})\, \mathfrak{V} = \Phi\, \mathfrak{V}$$

schreiben läßt.

Die Antezedenten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ bilden das orthogonale Tripel der Haupthalb-

[1]) Bezüglich der benutzten Formeln der Vektorrechnung verweisen wir auf: E. Budde: Tensoren und Dyaden, Braunschweig 1914; C. Runge: Vektoranalysis, Leipzig 1926; S. Valentiner: Vektoranalysis, Berlin 1923 (Sammlung Göschen).

[2]) $\mathfrak{U}_1 \cdot \mathfrak{v}_1\, \mathfrak{V}$ bildet den Vektor, der sich durch Multiplikation des Vektors $\mathfrak{U}_1$ mit dem skalaren Produkte $\mathfrak{v}_1 \mathfrak{V}$ der Vektoren $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{V}$ ergibt.

[3]) Nach Gl. (4) wird in einem beliebigen Koordinatensysteme der Betrag jeder Achsenkomponenten des Vektors $\mathfrak{u}$ eine lineare Funktion der Achsenkomponentenbeträge des Vektors $\mathfrak{V}$. Wenn wir ein Bezugssystem wählen, dessen Achsen (1), (2) und (3) mit den Richtungen $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$ zusammenfallen und wenn wir die algebraischen Werte der Achsenkomponenten der Vektore $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{u}$ . . . . mit:

$$U_1^{(1)},\ U_1^{(2)},\ U_1^{(3)},\ U_2^{(1)},\ U_2^{(2)},\ U_2^{(3)},\ u^{(1)},\ u^{(2)},\ u^{(3)} \text{ usw.}$$

bezeichnen, so wird:

$$u^{(1)} = U_1^{(1)} V^{(1)} + U_2^{(1)} V^{(2)} + U_3^{(1)} V^{(3)}$$

$$u^{(2)} = U_1^{(2)} V^{(1)} + U_2^{(2)} V^{(2)} + U_3^{(2)} V^{(3)}$$

$$u^{(3)} = U_1^{(3)} V^{(1)} + U_2^{(3)} V^{(2)} + U_3^{(3)} V^{(3)} .$$

In der Vektoranalysis wird diese Operation durch die Gl. (4) $\mathfrak{u} = \Phi\, \mathfrak{V}$ dargestellt, wobei Φ das Symbol eines Affinors ist:

$$\Phi = \begin{matrix} U_1^{(1)} & U_2^{(1)} & U_3^{(1)} \\ U_1^{(2)} & U_2^{(2)} & U_3^{(2)} \\ U_1^{(3)} & U_2^{(3)} & U_3^{(3)}. \end{matrix}$$

(Siehe S. Valentiner: Vektoranalysis.)

Achse des Verschiebungsellipsoides und die Konsequenten $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ ein ebenso orthogonales Tripel der diesentsprechenden Kraftrichtung.

Wenn die Verschiebungsdyade eine komplanare Dyade ist, wenn sie sich nämlich auf zwei Glieder reduzieren läßt:

$$\mathfrak{u} = (\mathfrak{a} ; \mathfrak{i} + \mathfrak{b} ; \mathfrak{j}) \mathfrak{V} = \Phi \mathfrak{V} \quad . \; . \; . \; . \quad (6),$$

so bewegt sich der Punkt auf einer Ellipse mit den Halbachsen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$.

Wenn die Verschiebungsdyade eine kollineare Dynade ist, also mit nur einem Glied:

$$\mathfrak{u} = (\mathfrak{a} ; \mathfrak{i}) \mathfrak{V} = \Phi \mathfrak{V} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7),$$

so bewegt sich der Punkt auf einer Geraden von der Gesamtlänge $2a$.

Wenn endlich die Dyade $\Phi = 0$ ist, so bleibt der Punkt fest.

Der erste Fall umfaßt den ebenen Formänderungszustand.

Die Verschiebung $\mathfrak{u}$ des Punktes m, welche die im Punkte n wirkende Einheitskraft $\mathfrak{V}$ hervorruft, wurde bereits durch die Gl. (4) oder (5) angegeben.

Die Verschiebung $\mathfrak{v}$ des Punktes n infolge einer Einheitskraft $\mathfrak{U}$ auf dem Punkte m wirkend, kann man auf gleicher Weise ermitteln. Werden die Verschiebungen $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{u}_3$ des Punktes m, welche den drei beliebigen Werten $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$, $\mathfrak{V}_3$ der Einheitskraft $\mathfrak{V}$ entsprechen, als gegeben betrachtet, so folgt auf Grund der vorigen Rechnung und nach Gl. (4):

$$\mathfrak{v} = (\mathfrak{V}_1 ; \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{V}_2 ; \mathfrak{u}_2 + \mathfrak{V}_3 ; \mathfrak{u}_3) \mathfrak{U} \quad . \; . \quad (8).$$

Soll nun jede der Verschiebungen $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{u}_3$ die Gl. (5) erfüllen, es muß sein:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{u}_1 &= (\mathfrak{a} ; \mathfrak{i} + \mathfrak{b} ; \mathfrak{j} + \mathfrak{c} ; \mathfrak{k}) \mathfrak{V}_1 \\ \mathfrak{u}_2 &= (\mathfrak{a} ; \mathfrak{i} + \mathfrak{b} ; \mathfrak{j} + \mathfrak{c} ; \mathfrak{k}) \mathfrak{V}_2 \\ \mathfrak{u}_3 &= (\mathfrak{a} ; \mathfrak{i} + \mathfrak{b} ; \mathfrak{j} + \mathfrak{c} ; \mathfrak{k}) \mathfrak{V}_3 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (9).$$

Führen wir diese Werte in die Gl. (8) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathfrak{v} = \; & [\mathfrak{V}_1 ; (\mathfrak{a} ; \mathfrak{i} + \mathfrak{b} ; \mathfrak{j} + \mathfrak{c} ; \mathfrak{k}) \mathfrak{V}_1 \\ & + \mathfrak{V}_2 ; (\mathfrak{a} ; \mathfrak{i} + \mathfrak{b} ; \mathfrak{j} + \mathfrak{c} ; \mathfrak{k}) \mathfrak{V}_2 \\ & + \mathfrak{V}_3 ; (\mathfrak{a} ; \mathfrak{i} + \mathfrak{b} ; \mathfrak{j} + \mathfrak{c} ; \mathfrak{k}) \mathfrak{V}_3] \cdot \mathfrak{U} \\ = \; & (\mathfrak{V}_1 \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{a} \mathfrak{U} + \mathfrak{V}_1 \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{b} \mathfrak{U} + \mathfrak{V}_1 \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{c} \mathfrak{U}) \mathfrak{V}_1 \\ & + (\mathfrak{V}_2 \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{a} \mathfrak{U} + \mathfrak{V}_2 \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{b} \mathfrak{U} + \mathfrak{V}_2 \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{c} \mathfrak{U}) \mathfrak{V}_2 \\ & + (\mathfrak{V}_3 \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{a} \mathfrak{U} + \mathfrak{V}_3 \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{b} \mathfrak{U} + \mathfrak{V}_3 \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{c} \mathfrak{U}) \mathfrak{V}_3 \\ = \; & (\mathfrak{V}_1 \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2 \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{V}_2 + \mathfrak{V}_3 \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{V}_3) \cdot \mathfrak{a} \mathfrak{U} \\ & + (\mathfrak{V}_1 \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2 \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{V}_2 + \mathfrak{V}_3 \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{V}_3) \cdot \mathfrak{b} \mathfrak{U} \\ & + (\mathfrak{V}_1 \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2 \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{V}_2 + \mathfrak{V}_3 \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{V}_3) \cdot \mathfrak{c} \mathfrak{U} . \end{aligned}$$

Da aber $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$, $\mathfrak{V}_3$ Einheitsvektoren, so sind $\mathfrak{V}_1 \mathfrak{i}$, $\mathfrak{V}_2 \mathfrak{i}$, $\mathfrak{V}_3 \mathfrak{i}$ die Projektionen des Vektors $\mathfrak{i}$ auf den Richtungen $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$, $\mathfrak{V}_3$; also:

$$\mathfrak{V}_1 \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2 \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{V}_2 + \mathfrak{V}_3 \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{V}_3 = \mathfrak{i} ;$$

ähnlich für $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$; dann ergibt sich schließlich:

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{a} \mathfrak{U} + \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{b} \mathfrak{U} + \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{c} \mathfrak{U} \quad . \; . \; . \; . \quad (10),$$

oder, da das rechte Glied der letzten Gleichung eine komplette Dyade bildet:

$$\boxed{\mathfrak{v} = (\mathfrak{i} ; \mathfrak{a} + \mathfrak{j} ; \mathfrak{b} + \mathfrak{k} ; \mathfrak{c}) \mathfrak{U} = \Phi_0 \mathfrak{U}} \quad . \quad (11).$$

(11) ist die reziproke Dyade der Dyade (5). Dyade (11) läßt sich in die Normalform (d. h. mit Einheitsvektoren als Konsequenten) bringen, indem man entsprechend durch die Absolutbeträge der Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ die Antezedenten multipliziert und die Konsequenten dividiert:

$$\mathfrak{v} = \left(a \, \mathfrak{i} ; \frac{\mathfrak{a}}{a} + b \, \mathfrak{j} ; \frac{\mathfrak{b}}{b} + c \, \mathfrak{k} ; \frac{\mathfrak{c}}{c} \right) \mathfrak{U} \quad . \quad (12).$$

So wird die Dyade (11) in die Normalform:

$$\mathfrak{v} = (\mathfrak{a}_0 ; \mathfrak{i}_0 + \mathfrak{b}_0 ; \mathfrak{j}_0 + \mathfrak{c}_0 ; \mathfrak{k}_0) \mathfrak{U} \quad . \; . \; . \quad (13)$$

gebracht, wenn:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{a}_0 &= a \, \mathfrak{i} & \mathfrak{b}_0 &= b \, \mathfrak{j} & \mathfrak{c}_0 &= c \, \mathfrak{k} \\ \mathfrak{i}_0 &= \frac{\mathfrak{a}}{a} & \mathfrak{j}_0 &= \frac{\mathfrak{b}}{b} & \mathfrak{k}_0 &= \frac{\mathfrak{c}}{c} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (14).$$

Aus obigem und besonders aus Gl. (11) und (14) folgt der:

Zweiter Satz[4]): Wenn in einem elastischen isotropen Körper E_m das Verschiebungsellipsoid (nach dem ersten Satze) des Punktes m, infolge entsprechend einer im Punkte n wirkender Kraft von konstanter Größe und veränderlicher Richtung und E_n das Verschiebungsellipsoid des Punktes n, infolge entsprechend der gleichen Wirkung derselben Kraft im Punkte m, so sind beide Ellipsoide einander gleich und so gegen einander gelegen, daß die Hauptachsen jedes Ellipsoides nach Größe und Richtung die Verschiebungen darstellen, welche den durch die Hauptachsen des anderen Ellipsoides angegebenen Kraftrichtungen entsprechen. **(Konjugierte Ellipsoiden.)** Diese Verschiebungsellipsoiden ergeben sich aus den reziproken Dyaden:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{s}_{mn} &= (\mathfrak{a} ; \mathfrak{f} + \mathfrak{b} ; \mathfrak{g} + \mathfrak{c} ; \mathfrak{h}) \mathfrak{V}_n \\ \mathfrak{s}_{nm} &= (\mathfrak{f} ; \mathfrak{a} + \mathfrak{g} ; \mathfrak{b} + \mathfrak{h} ; \mathfrak{c}) \mathfrak{V}_m \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (15),$$

d. h. die erzeugenden Dyaden von zwei konjugierten Verschiebungsellipsoiden sind reziproke Dyaden.

A. Roussopoulos, Athen. 192

[4]) Den ersten Satz kann man auch aus dem Superpositionssatze direkt ableiten, es ist jedoch zweckmäßiger, beide Sätze aus dem Bettischen Gesetze zu erhalten.

BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die VDI-Buchhandlung Berlin NW 7, Ingenieurhaus, zu beziehen.)

Hydro- und Aeromechanik nach Vorlesungen von L. Prandtl von Dr. phil. O. **TIETJENS**, Mitarbeiter am Forschungsinstitut der Westinghouse Electric and Manufacturing Co., Pittsburgh Pa., U.S.A. Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. L. Prandtl, Direktor des Kaiser Wilhelm-Instituts für Strömungsforschung in Göttingen. Zweiter Band: Bewegung reibender Flüssigkeiten und technische Anwendungen. Mit 237 Textabbildungen und 28 Tafeln. Verlag Julius Springer, Berlin 1931. VIII + 299 S. Preis geb. 23 M.

Der zweite Band des Prandtl-Tietjensschen Werkes enthält mehr von dem eigentlichen Forschungsgebiet Prandtls und seiner Schüler als der erste und wird daher um so größeres Interesse in Anspruch nehmen dürfen. Man findet hier im großen Ganzen wiedergegeben, was in zahlreichen Publikationen der Göttinger Schule wiederholt, von der einen und anderen Seite her, in dieser und in jener Form, schon dargestellt wurde. Offenkundig hat dem Verfasser weniger das Ziel vorgeschwebt, den Leser über alles, was er wissen möchte, zu unterrichten, ihm also die nötigen Behelfe für praktisches Arbeiten an die Hand zu geben, als die Aufgabe, einmal das zusammenzufassen, was in den letzten Jahrzehnten die Göttinger Schule an wertvollen Resultaten zutage gefördert hat. Da dies, wie man weiß, nicht wenig ist, so wird man auch diese Aufgabenstellung, die sonst den Forderungen, die man an ein Lehrbuch richtet, nicht ganz angemessen ist, anerkennen dürfen. Über die Form, in der der Stoff auf Grundlage der Prandtlschen Vorlesungen von Tietjens behandelt wird, ist schon im Referat über den ersten Band gesprochen worden.

Inhaltlich gliedert sich das Buch etwa in drei Hauptteile. Im ersten wird die laminare und turbulente Bewegung in geraden zylindrischen Leitungen, die Grenzschichttheorie und der Widerstand umströmter Körper besprochen. Hieraus folgen längere Ausführungen über Auftrieb und Widerstand von Tragflächen, ohne daß die eigentlichen theoretischen Gesichtspunkte voll herausgearbeitet würden. Den Abschluß bilden Beschreibungen der Meßmethoden und der Göttinger Versuchseinrichtungen. Mises. 292

Physikalisches Handwörterbuch. Herausgeg. von ARNOLD **BERLINER** und KARL **SCHEEL.** 2. Aufl. Julius Springer Verlag, Berlin 1932. VI + 1428 S. mit 1114 Textfiguren. Preis geb. 99,60 M.

Die zweite Auflage des Handwörterbuchs zeigt den erwarteten Fortschritt gegenüber der ersten, ja vielleicht noch weit mehr, als man in dieser Hinsicht erwarten konnte. Der Hauptmangel der ersten Ausgabe, daß zwar große Abhandlungen über einzelne Gebiete der Physik vorhanden waren, aber nur unter wenigen Stichworten Auskunft gefunden werden konnte, ist fast völlig beseitigt. Man sucht nicht mehr vergebens, wenn man einen mehr oder weniger gebräuchlichen Terminus aufschlägt. In der Auswahl der Mitarbeiter waren die Herausgeber jedenfalls recht geschickt. Man findet die verschiedenen Gebiete der technischen Mechanik bearbeitet von Eisner, Erk, Philipp Frank, Grammel, Masing, Nádai, Schleicher, Schrenk u. a. Der Inhalt ist gegenüber der ersten Auflage fast auf das Doppelte gewachsen, ohne daß sich — bemerkenswerte technische Leistung — der äußere Umfang des Buches verändert hätte. Mises. 292.

Berichte a. d. Laboratorium für Verbrennungskraftmaschinen der Technischen Hochschule Stuttgart. 1. Heft: Dr.-Ing. OTTO **LUTZ**, Untersuchungen über die Spülung von Zweitaktmotoren. Mit einem Vorwort von Prof. W. Maier, Vorstand des Laboratoriums für Verbrennungskraftmaschinen. Mit 63 Abb. Verlag K. Wittwer, Stuttgart 1931. 92 S. Preis kart. 8,50 M.

Die vielfach bearbeitete Frage nach dem Spülvorgang in Zweitaktmaschinen ist hier durch Versuche an einem bestimmten Fall weiter geklärt worden. Naturgemäß mußten die Versuchsbedingungen von jenen der wirklichen Maschine sehr verschieden ausfallen, damit überhaupt Messungen möglich werden; insbesondere wurde nur der stationäre Vorgang, d. i. eine länger dauernde gleichmäßige Strömung durch den Zylinder, untersucht, ein Fall, der mit der wirklichen Spülung eigentlich sehr wenig übereinstimmt. Eher ließe sich die Beschränkung auf die ebene Strömung statt der räumlichen als Näherung ansehen. Trotzdem gibt aber die Untersuchung, die ungemein sorgfältig durchgeführt und auch theoretisch erörtert wurde, neue Gesichtspunkte und Hilfsmittel für die wenigstens qualitative Beurteilung der in Betracht kommenden Fragen und ist als eine dankenswerte Erweiterung unseres Einblickes in diese Vorgänge anzusehen. Körner. 257.

Dr. GUSTAV **ROSMANITH**, Professor an der Deutschen Technik in Prag. **Mathematische Statistik der Personenversicherung.** Mit 11 Fig. im Text. Samml. mathem.-physik. Lehrbücher Nr. 28. Verlag B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin 1930. VI + 141 S. Preis geb. 8 M.

Die Entstehung dieses Buches ist vermutlich in den Vorlesungen zu suchen, die der Verfasser als Professor an der deutschen Technischen Hochschule in Prag hält. Darnach entspricht die Abgrenzung des Stoffes dem Inhalte, den die Vorlesungen über diesen Gegenstand an den österreichischen Hochschulen zu haben pflegen, wobei die allerdings durchaus verfehlte Abgrenzung der Wahrscheinlichkeitsrechnung gegenüber der mathematischen Statistik, die in den versicherungstechnischen Kursen doch nun schon ein Ganzes bilden sollten, noch immer fortwirkt.

Der Verfasser begründet in seinem Vorwort diese Einschränkung des Stoffes damit, daß er das Buch hauptsächlich den mathematisch nicht gereiften Interessenten widmet. Gegen diese Begründung ist, wenn die Trennung des Stoffes der Wahrscheinlichkeitsrechnung von der mathematischen Statistik, die — wie gesagt — sachwidrig ist, aufrechterhalten wird, nichts einzuwenden.

Im einzelnen ist aber zu bedenken, daß gerade dieses für mathematisch nicht genügend gebildete Leser bestimmte Buch eine größere Reihe von sinnstörenden Rechen- und Druckfehlern enthält und überdies auf die exakte Darstellung nicht immer die nötige Aufmerksamkeit gerichtet ist. Manche Kapitel sind überdies nicht genug durchgearbeitet, wie z. B. die Besprechung der mechanischen Ausgleichs-Methoden oder das Kapitel über die minderwertigen Leben, manche nicht sorgfältig genug redigiert, z. B. die Besprechung der geometrischen Darstellung der Gesamtheiten, in der sich eine für den Anfänger gänzlich unverständliche Zeichnung (Seite 40, Figur 5), eine Reihe von Zählfehlern u. dgl. finden. Die neueren Sterblichkeitstafeln kommen in dem Buch sehr kurz, obwohl gerade die neue deutsche Vereinstafel mannigfache Anregung zur Diskussion hätte bieten sollen. Fanta, Wien. 281

Prof. Dr. phil. W. **LOREY,** Oberstudiendirektor, und Dr. rer. pol. G. **BEYRODT,** Studienrat, beide an der Öffentlichen Höheren Handelslehranstalt mit Wirtschaftsoberschule zu Leipzig, Tafeln zur Mathematik des Geldverkehrs und der Versicherung. Mit Beispielen und Formeln. I + 37 S. mit 21 Tafeln. Verlag B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1931. Preis 3,60 M.

Die in Form eines Griffregisters praktisch zugeschnittene Broschüre enthält außer finanz-mathematischen Tafeln, wie Auf- und Abzinsungsfaktoren, Endwerten der vorschüssigen, Barwerten der nachschüssigen Zeitrenten, Annuitäten, wirklichen und konformen Zinsfüßen bei unterjähriger Zinszahlung von 1 bis 10 % noch die 4%ige Sterbetafel des Vereins deutscher Lebensversicherungen von 1926 mit neu berechneten Werten der Lebenserwartung und Sterbensintensität, ferner eine Logarithmentafel und Quadrattafel, jeweils mit Beispielen versehen und eine kurze Formelsammlung.

E. J. Gumbel (Heidelberg). 256

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgeg. v. d. Preuß. Akademie der Wissenschaften. Schriftleiter Georg **FEIGL.** Bd. 51, Jahrgg. 1925. Sonderheft IV Geometrie. 172 S. Preis 19,60 M.
— Bd. 54, Jhrgg. 1928. S.-H. Angewandte Mathematik. 261 S. Preis 29 M.
— Bd. 53 I. Jhrgg. 1929. S.-H. Angewandte Mathematik. 223 S. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin u. Leipzig 1932.

FRIEDRICH **ENGEL,** Professor in Gießen. Die Liesche Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. (Vorlesungen). Bearbeitet von Dr. Karl Faber. B. G. Teubner Verlag, Leipzig und Berlin 1932. XI + 367 S. Preis 28 M.

Handbuch der Experimentalphysik. Herausgeg. von W. **WIEN** und F. **HARMS.** Band 4 Hydro- und Aerodynamik. 2. Teil: Widerstand und Auftrieb. Herausgeg. von Ludwig Schiller. Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H., Leipzig 1932. VIII + 443 S. mit 245 Abb. Preis 41 M.

EARLE **BUCKINGHAM,** Prof. für Normung und Meßtechnik am Massachusetts Institute of Technology, Stirnräder mit geraden Zähnen. Zahnformen, Betriebsverhältnisse und Herstellung. Deutsche Bearbeitung von Dipl.-Ing. Georg Olah. Verlag Julius Springer, Berlin 1932. VIII + 456 S. mit 215 Abb. im Text und 37 Tabellen. Preis geb. 32,50 M.

Mitteilungen des Instituts für Strömungsmaschinen der Techn. Hochschule Karlsruhe. Herausgegeben vom Institutsvorstand W. **SPANNHAKE,** o. Prof. Heft 2 mit 108 Abb. im Text. II + 175 S. Kommissionsverlag des VDI-Verlages, Berlin 1932. Preis brosch. 4 M.

Prof. EMIL **COHN.** Faraday und Maxwell. Deutsches Museum, Abhandlungen und Berichte, 4. Jahrgang (1932), Heft 1. VDI-Verlag, Berlin 1932. 29 S. mit 12 Abb. Preis brosch. —,90 M.

Dr. GERHARD **KOWALEWSKI,** o. ö. Prof. an der Technischen Hochschule Dresden, Interpolation und genäherte Quadratur. Eine Ergänzung zu den Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung. Verlag B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1932. V + 146 S. mit 10 Fig. im Text. Preis geb. 9,60 RM.

Dipl.-Ing. **E. ELWITZ,** Beratender Ingenieur in Düsseldorf, Der zweistielige Stockwerkrahmen. Komm.-Verlag von A. Bagel, A.-G., Düsseldorf 1931. 40 S. mit 28 Abb.

P. W. **BRIDGMAN,** Prof. der Physik an der Harvard-Universität, Theorie der physikalischen Dimensionen. Ähnlichkeitsbetrachtungen in der Physik. Deutsche Ausg. hrsg. v. Dipl.-Ing. H. Holl in Danzig-Langfuhr. Verlag B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin 1932. IV + 117 S. Preis geb. 6,80 M.

FRIEDRICH **KOHLRAUSCH,** Kleiner Leitfaden der praktischen Physik. 5. Aufl. Neubearb. von Dr. Friedrich Krüger, o. Prof. der Physik, Direktor des Phys. Instituts an der Universität Greifswald. Verlag B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin 1932. XXVII + 498 S. mit 379 Abb. im Text. Preis geb. 14,80 M.

Dr. RUDOLF **ROTHE,** o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Berlin, Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure. Teil IV: Übungsaufgaben mit Lösungen, Formelsammlung. Unter Mitwirkung von Stud.-Rat Oskar Degosang. 1. Heft: Zahlen, Veränderliche und Funktionen. Hauptsätze der Differentialrechnung und Grundformeln der Integralrechnung. Aus der Sammlung „Teubners Mathematische Leitfäden“, Bd. 33. Verlag B. G. Teubner, Leipzig-Berlin 1932. 52 S. mit 56 Abb. im Text. Preis geh. 2 M.

Prof. Dr. techn. MAX **KURREIN,** Charlottenburg und Dr.-Ing. GÜNTHER **MEYER-JAGENBERG,** Düsseldorf, Gleit-, Kugel- und Rollenlager und ihre Schmierung im Prüfstand und in der Transmission. Heft 9 der Berichte des Versuchsfeldes für Werkzeugmaschinen an der Techn. Hochschule Berlin, hrsg. von Prof. Dr.-Ing. Georg Schlesinger. Verlag Julius Springer, Berlin 1932. 51 S. mit 141 Abb. Preis geh. 13,50 M.

PAUL B. **FISCHER,** Studienrat am Gymnasium Berlin-Steglitz, Determinanten. 3. Aufl. Sammlung Göschen, Bd. 402. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin u. Leipzig 1932. 136 S. Preis 1,62 M.

P. S. de LAPLACE, Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeit. Herausg. von R. v. Mises. Mit Anm. von H. Pollaczek-Geiringer. Nr. 233 der Sammlung Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften. Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H., Leipzig 1932. VI + 211 S. Preis kart. 9,60 M.

Dr.-Ing. FRIEDRICH **BLEICH,** Stahlhochbauten, ihre Theorie, Berechnung und bauliche Gestaltung. 1. Band. VIII + 558 S. mit 481 Abb. im Text. Julius Springer, Berlin 1932. Preis geb. 66,50 M.

HERMANN v. **SCHELLING,** Die wirtschaftlichen Zeitreihen als Problem der Korrelationsrechnung. Mit besonderer Berücksichtigung der „lag“ correlation. Heft 11 der Veröffentl. der Frankfurter Ges. für Konjunkturforschung. Hrsg. von Dr. Eugen Altschul. Bonn 1931, Kurt Schroeder, Verlag. 64 S.

P. A. M. **DIRAC,** Fellow of St.-John's College, Cambridge, Les Principes de la Mécanique Quantique. Traduit par Al. Proca, Licencié ès Sciences, et J. Ullmo, Ancien élève de l'Ecole Polytechnique. Recueil des conférences-rapports de documentation. Vol. 21. Les Presses universitaires de France. 49, Boulevard Saint Michel, Paris 1931. VIII + 314 S.

G. A. **BLISS**, Prof. der Mathematik an der Universität Chicago, Variationsrechnung. Deutsche Ausgabe herausgeb. von F. Schwank. Verlag B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1932. VIII + 127 S. mit 47 Fig. Preis 6,30 M.

Ing. ROBERT **PRIBRAM**, Konstrukteur i. Pens., Raumgittertheorie. Ein Fundament zur konstruktiven Materialienkunde. 1. Bd. Heft 1. Meyer's techn. Verlag, Bodenbach a. Elbe, C. S. R. 48 S. Preis 6 Kc.

Dr. **OSKAR PERRON**, o. ö. Prof. der Mathematik an der Universität München. Algebra. I. Die Grundlagen. 2. verb. Auflage. Bd. 8 der Sammlung „Göschens Lehrbücherei". I. Gruppe: Reine und angewandte Mathematik. VIII + 300 S. mit 4 Fig. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1932. Preis 12,80 M.

Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano. Vol. V (1931—IX). Libreria Editrice Politecnica. Milano 1931. XI + 225 S.

NACHRICHTEN

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Ortsgruppe Berlin.

Am 24. Juni sprach Herr Reg.-Rat Dr. J. v. Behr (Berlin) über „Mathematische Probleme des Bausparwesens".

Am 22. Juli hält Herr Dr.-Ing. G. Weinblum (Berlin) einen Vortrag über die „Formgebung von Schiffen".

Ortsgruppe Göttingen.

Am 15. Juli findet im Hörsaal des Instituts für Werkzeugmaschinen der Technischen Hochschule ein Vortrag von Herrn Prof. Schwerd statt über „Neue Untersuchungen über den Spanablauf bei hohen Geschwindigkeiten".

Prager Mitglieder.

Am 2. Juni sprach Herr Priv.-Dozt. Dr. J. Labus (Prag) über „Berechnung der Einschwingzeit von elektrischen Bandfiltern".

Persönliches.

Am 2. Juli beging Herr Gehr. Prof. Dr. Dr.-Ing. e. h. O. Knoblauch, seit dreißig Jahren Leiter des Laboratoriums für technische Physik an der Technischen Hochschule in München, seinen 70. Geburtstag. Man verdankt ihm und den unter seiner Leitung ausgeführten Forschungsarbeiten seiner Schüler wesentliche Fortschritte der technischen Thermodynamik, vor allem Messungsresultate über die spezifische Wärme des Wasserdampfes, wie sie heute die unentbehrliche Grundlage für die Berechnung der Wärmekraftmaschinen bilden.

Herr Dr. Fritz Rehbock hat sich an der Universität Bonn für das Fach der angewandten Mathematik habilitiert 293.

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

In Bd. 11/1931, S. 341 dieser Zeitschrift behandelte W. Hovgaard das Problem der Spannungen in überlappten Schweißnähten unter Benutzung des Satzes vom Minimum der Formänderungsarbeit. Da nun in der Zuschrift des Herrn A. Lockschin (diese Zeitschrift, Bd. 12/1932, S. 128) auch die einfache Ableitung der Haftspannungen mitgeteilt wurde, möchte ich darauf aufmerksam machen, daß diese ein-dimensionale Theorie schon von Herrn Arnovljević (Das Verteilungsgesetz der Haftspannungen bei axial beanspruchten Verbundstäben, Zeitschr. f. Architektur und Ingenieurwesen, Hannover 1909, S. 413) und von mir (Über die Festigkeit von Löt-, Leim- und Nietverbindungen, Österr. Wochenschrift f. d. öffentl. Baudienst 1919, Heft 7/8), und zwar ebenfalls in der einfacheren Behandlungsweise durch Benutzung der Gleichgewichtsbedingungen, der elastischen und geometrischen Bedingungen gelöst wurde.

Die Spannungen in Schweißnähten bilden einen besonders einfachen Sonderfall der Haftverbindungen im allgemeinen, zu denen auch die Nietungen gezählt werden müssen. Über Nietverbindungen siehe auch Arnovljević, „Zur Kraftverteilung in genieteten Stäben", Österr. Wochenschrift f. d. öffentl. Baudienst 1908 und „Inanspruchnahme der Anschlußnieten elastischer Stäbe", Zeitschr. f. Arch. u. Ing.-Wesen, Hannover 1909, sowie Fillunger, „Die Berechnung genieteter Vollwandträger", Akad. d. Wissensch. Wien, 127. Bd., 9. Heft, 1918.

Allen diesen Haftspannungsproblemen ist gemeinsam, daß man Randbedingungen nur für die Normalspannungen in den stabförmigen Körpern, nicht aber für die Haftspannungen bzw. Nietkräfte selbst angeben kann. Daher ist es im Gegensatz zu dem Vorgange des Herrn Lockschin zweckmäßiger, aus seinen Gleichungen (1), (2) und (3) nicht p_{x1} und p_{x2} sondern q_x und eine der Normalspannungen, etwa p_{x2} zu eliminieren. Man erhält dann sofort die schon von Herrn Arnovljević verwendete Differential-Gleichung

$$\frac{d^2 p_{x1}}{d x^2} - \frac{a(A+a)}{A\,a\,E\,\mu}\, p_{x1} = -\frac{a}{a\,E\,\mu}\, p_1$$

also

$$p_{x1} = D_1 e^{m x} + D_2 e^{-m x} + \frac{A}{A+a}\, p_1 .$$

Für $x=0$ ist $p_{x1}=0$, für $x=L$ ist $p_{x1}=p_1$, somit

$$D_1 = p_1 \frac{1-\frac{A}{A+a}\left(1-e^{-mL}\right)}{e^{mL}-e^{-mL}},$$

$$D_2 = -p_1 \frac{1+\frac{A}{A+a}\left(e^{mL}-1\right)}{e^{mL}-e^{-mL}},$$

wo $D_1>0$ und $D_2<0$ ist. Endlich wird

$$q_x = \frac{A}{a}\frac{d\,p_{x1}}{d\,x} = \frac{A\,m}{a}\left(D_1 e^{m x} - D_2 e^{-m x}\right).$$

Es bietet keine Schwierigkeiten, in dieser Weise andere Haftfestigkeitsprobleme zu behandeln. Insbesondere braucht man für eine unterbrochene Schweißung keinen Mittelwert zu verwenden, sondern kann auch diese Frage im Sinne der eindimensionalen Theorie „exakt" lösen, worüber a. a. O. berichtet werden soll.

Wien, am 3. Mai 1932.

P. Fillunger. 281

Für die Schriftleitung verantwortlich: Professor Dr. von Mises, Berlin NW 87, Siegmundshof 9;
für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 40. —
Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.